COPPE UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

ESTIMATIVAS DO NÚMERO DE CICLOS ASSOCIADOS À INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS DE FADIGA MEDIANTE SIMULAÇÃO

Dalvania Muniz de Paiva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientadores: Enrique Mariano Castrodeza
Gilberto Bruno Ellwanger

Rio de Janeiro
Julho de 2020

ESTIMATIVAS DO NÚMERO DE CICLOS ASSOCIADOS À INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS DE FADIGA MEDIANTE SIMULAÇÃO

Dalvania Muniz de Paiva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Examinada por:

Prof. Celio Albano da Costa Neto, Ph.D.

Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.

Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JULHO DE 2020

Paiva, Dalvania Muniz de

Estimativas do número de ciclos associados à iniciação e propagação de trincas de fadiga mediante simulação/Dalvania Muniz de Paiva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

xv, 119 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Enrique Mariano Castrodeza
Gilberto Bruno Ellwanger

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 88 – 95.

1. Fadiga. 2. Iniciação de trincas. 3. Propagação de trincas. 4. Confiabilidade estrutural. I. Castrodeza, Enrique Mariano *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. III. Título.

Dedico este trabalho à minha
mãe e heroína, Edir Muniz.

Agradecimentos

Agradeço a meus orientadores, Enrique Castrodeza e Gilberto Ellwanger, e também à professora Silvia Corbani, pela atenção, disponibilidade, ensinamentos, compreensão e suporte. Obrigada por sempre me encorajarem a continuar.

A meus pais, Edir e Rosinaldo, meu primeiro e maior exemplo de perseverança. Obrigada por sempre me ensinarem a buscar conhecimento e empoderamento, e nunca desistir frente aos desafios. Amo vocês.

Ao amor da minha vida, Felipe, por todo o suporte e carinho comigo e com a minha carreira, incluindo este trabalho. A Gisele Firmino, Thais Sampaio, Juliana Conceição e todos as demais amigas e amigos que me apoiam.

A meus companheiros de laboratório, Egon Ramírez e João Menezes, pelo apoio durante a concepção e ensaio dos corpos de prova. Ao professor Hector Kotik, pelo auxílio na execução dos experimentos.

Ao Francisco, um dos funcionários mais simpáticos e prestativos da UFRJ, por toda a assistência.

Aos profissionais que formaram a minha rede de apoio, tão necessária durante os anos de estudo para produção dessa dissertação: Andressa Bonet, Lucas Muniz, Débora Regufe, Tatiana Rosa. Sem vocês eu não estaria aqui (literalmente).

À Radix Engenharia e Software por ter possibilitado o comparecimento às aulas e compromissos acadêmicos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTIMATIVAS DO NÚMERO DE CICLOS ASSOCIADOS À INICIAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE TRINCAS DE FADIGA MEDIANTE SIMULAÇÃO

Dalvania Muniz de Paiva

Julho/2020

Orientadores: Enrique Mariano Castrodeza
Gilberto Bruno Ellwanger

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

Estruturas submetidas a carregamentos cíclicos estão sujeitas ao fenômeno de fadiga, que pode levar à ruptura local ou generalizada. Podem ser nucleadas trincas que se propagam a cada ciclo de carregamento, até que o componente perca sua estabilidade e a falha ocorra. Portanto, a vida de uma trinca de fadiga possui dois períodos distintos: nucleação e propagação.

Neste trabalho, é proposta uma metodologia para avaliar o número de ciclos associado a cada um dos períodos. Aplica-se duas teorias amplamente utilizadas no contexto de fadiga estrutural: a teoria de Wöhler, que avalia as fases de iniciação e propagação de uma trinca em corpos não trincados; e a teoria de Paris, que trata da propagação em corpos pré-trincados. Através do uso de conceitos de confiabilidade estrutural, foi possível modelar as incertezas inerentes ao problema estudado. Dado o volume de cálculo expressivo, apresenta-se uma simulação computacional em *Python* para análise numérica.

Realizou-se estudos experimentais em corpos de prova não trincados, com a presença de concentradores de tensão. Os números de ciclos obtidos pelo modelo proposto foram inferiores aos observados experimentalmente, indicando que a metodologia apresenta resultados apropriados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ESTIMATING THE NUMBER OF CYCLES ASSOCIATED WITH FATIGUE CRACK INITIATION AND PROPAGATION WITH A NUMERICAL APROACH

Dalvania Muniz de Paiva

July/2020

Advisors: Enrique Mariano Castrodeza
Gilberto Bruno Ellwanger

Department: Metallurgical and Materials Engineering

Structures submitted to cyclic loadings are subject to fatigue, which may lead to a local or global rupture. Cracks may initiate and grow every loading cycle until the component loses its stability and a failure occurs. Therefore, the life of a fatigue crack has two distinct periods: nucleation and propagation.

In this work, it is proposed a methodology to evaluate the number of cycles associated with each of the periods. Two theories widely used in the context of structural fatigue are applied: Wöhler's theory, which evaluates both crack initiation and propagation in uncracked bodies; and Paris' theory, which deals with propagation in precracked bodies. It was possible to model the uncertainties inherent to the studied problem through the use of structural reliability concepts. Considering that the volume of computation data is expressive, a simulation in Python is presented for numerical analysis.

Experimental studies were carried out on uncracked bodies, with stress concentrators. The number of cycles obtained by the proposed model were lower than those observed experimentally. It indicates that the methodology presents appropriate results.

Sumário

Lista de Figuras x

Lista de Tabelas xiv

Lista de Abreviaturas xv

1 Introdução 1

1.1 Motivação 2

1.2 Objetivo 3

1.3 Organização do trabalho 3

2 Revisão da literatura 4

2.1 O fenômeno de fadiga em metais 4

2.2 A teoria de Wöhler 8

2.2.1 A curva S-N 8

2.2.2 Concentração de tensões e tensões de “hot-spot” 9

2.2.3 Tensão média diferente de zero 12

2.3 A teoria de Paris 14

2.3.1 Balanço energético de Griffith 14

2.3.2 Abordagem por intensidade de tensões 18

2.3.3 Plasticidade na ponta da trinca 20

2.3.4 A curva $da/dn \times \Delta K$ 22

2.4 Utilização das teorias de Paris e Wöhler: o estado da arte 26

2.4.1 Pugno, Cornetti e Carpinteri (2007) 26

2.4.2 Chen, Wang e Soares (2011) 28

2.4.3 Ávila, Palma e de Paula (2017) 28

2.4.4 Hashemi *et al.* (2017) 30

2.4.5 Wu e Chen (2017) 31

2.5 Método dos Elementos Finitos (MEF) 34

2.5.1 Formulação 34

2.5.2 Elementos isoparamétricos 36

2.5.3 Quadratura de Gauss-Legendre 38

2.5.4 Mecânica da fratura no MEF 40
2.6 Confiabilidade estrutural 43

3 Análise numérica 49
3.1 Estudo de caso: chapa com trinca de borda 50
3.2 Estudo de caso: chapa com entalhe 52

4 Metodologia experimental 70
4.1 Material utilizado 70
4.2 Preparação dos corpos de prova 71
4.3 Procedimento dos ensaios 72

5 Resultados e Discussões 78
5.1 Resultados da análise experimental 78
5.2 Resultados da análise numérica 80
5.3 Discussões 83

6 Conclusão 86

Referências 88

A Código em *Python* para análise de confiabilidade estrutural A-1
A.1 analysis_utils.py A-1
A.2 crack_growth.py A-2
A.3 geometry.py A-8
A.4 load.py A-10
A.5 material.py A-10
A.6 paris_curve.py A-11
A.7 random_variable.py A-12
A.8 reliability_analysis.py A-12
A.9 wohler_curve.py A-14

B Dados de CMOD obtidos experimentalmente B-1
B.1 CP01 . . . . B-1
B.2 CP02 . . . . B-3
B.3 CP03 . . . . B-7

Lista de Figuras

2.1 Bandas de deslizamento em uma liga de cobre, para (a) 5×10^3 ciclos, (b) 1×10^4 ciclos e (c) 1×10^5 ciclos (adptada de LUKÁŠ, 1996, p. 237) 4
2.2 Transição do estágio I para o estágio II de propagação (adptada de KUNKLER *et al.*, 2008, p. 716) 5
2.3 Micrografia com as primeiras microtrincas formadas na superfície de uma liga de cobre (LUKÁŠ, 1996, p. 237) 6
2.4 Processo de propagação de trincas e a formação de estrias de fadiga (LAIRD, 1967, p. 136) 7
2.5 Estrias de fadiga na parede de uma tubulação (FERREIRA, 2013) . . 7
2.6 Superfície de fratura de uma peça, destacadas as regiões de nucleação e ruptura final (régua em mm) 8
2.7 Representação esquemática de uma Curva S-N (BATALHA, 2009) . . 9
2.8 Concentração de tensões em uma placa com orifício 9
2.9 Exemplo de modelo em elementos finitos para determinação do K_t (BATALHA, 2009) 10
2.10 Estimativa da tensão nominal através das tensões obtidas por elementos finitos (adaptada de HODHIGERE *et al.*, 2017, p. 4) . . . 11
2.11 Tensão de hot-spot em uma junta soldada (MOŽE, 2015) 11
2.12 Parâmetros de um carregamento cíclico de amplitude constante . . . 12
2.13 Comparação entre as curvas de Gerber, Goodman e Soderberg (adaptada de BRANCO *et al.*, 1986) 13
2.14 Placa infinita submetida a tensão remota (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 30) 15
2.15 Balanço energético para a placa da Figura 2.14 (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 11) 17
2.16 Coordenadas polares de um elemento à frente da trinca (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 43) 19
2.17 Principais modos de fratura 19
2.18 Distribuição de tensões à frente da ponta da trinca (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 62) 21

2.19 Comprimento efetivo de uma trinca (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 64) 22
2.20 Representação da curva $da/dn \times \Delta K$ (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 211) 23
2.21 Taxas de crescimento de trincas de um aço submetido a diversos ΔK(PARIS *et al.*, 1972, apud DOWLING, 2013, p. 565) 24
2.22 Representação esquemática da curva de propagação (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 209) 25
2.23 Pontos utilizados na análise (adaptada de ÁVILA *et al.*, 2017) 29
2.24 a)Trinca iniciada em solda entre chapas b)Trinca propagada na direção da solda longitudinal c)Trinca identificada visualmente d)Líquido penetrante na trinca identificada (adaptada de ÁVILA *et al.*, 2017) 30
2.25 Curva S-N bi-linear adotada por WU e CHEN (2017) 32
2.26 Geometria de uma trinca de superfície (WU e CHEN, 2017) 32
2.27 Pontos analisados na seção transversal da base da torre (adaptada de WU e CHEN, 2017) 33
2.28 Resultados obtidos para os pontos analisados (adaptada de WU e CHEN, 2017) 33
2.29 Elemento infinitesimal indeformado (a), sujeito a deformação na direção x_1 (b), na direção x_2 (c) e cisalhamento (d) (adaptada de COOK, 1994, p.42) 34
2.30 Elemento isoparamétrico e suas coordenadas globais (a) e naturais (b) 36
2.31 Resultado encontrado por WESTERGAARD (1939, apud CHAN *et al.*, 1970, p. 11) 41
2.32 Elemento *quarter-point* T6 (a) e Q8 colapsado (b) 42
2.33 Exemplo de roseta na ponta da trinca (CORBANI, 2012) 42
2.34 Pontos de extrapolação (PARTHEYMÜLLER, 1999, apud ZAFOŠNIK e FAJDIGA, 2016, p. 1674) 43
2.35 Extrapolação de K_I^* (adaptada de PARTHEYMÜLLER, 1999, apud ZAFOŠNIK e FAJDIGA, 2016, p. 1674) 43
2.36 Distribuições log-normais com diferentes parâmetros μ e σ 45
2.37 Domínios de falha D_f e de segurança D_s (adaptada de BECK, 2010, p. 77) 46
2.38 Índice β e probabilidade de falha 48

3.1 Geometria do primeiro estudo de caso 50
3.2 Resultados obtidos para R=0,2 (sem escala) 52
3.3 Geometria estudada (dimensões em milímetros) 53

3.4 Curva S-N utilizada (adaptada de WANG *et al.*, 2010) 53
3.5 Malha utilizada 54
3.6 Condições de contorno 55
3.7 Convergência dos deslocamentos nodais obtida pelo software Ansys Workbench® 56
3.8 Máximas tensões principais 57
3.9 Máximas tensões principais – Região do pino 58
3.10 Curva $da/dN \times \Delta K$ utilizada (adaptada de CONLE, 2014) 59
3.11 Discretização da malha para ajuste do fator de forma (Sem escala para possibilitar a representação da malha) 60
3.12 Exemplo de malha gerada para a/W = 0,70 60
3.13 Detalhe da região próxima à trinca 61
3.14 Condições de contorno 61
3.15 Pontos de extrapolação N_E 62
3.16 Curva ajustada para a/W = 0,55 63
3.17 Curva ajustada para a/W = 0,60 63
3.18 Curva ajustada para a/W = 0,65 64
3.19 Curva ajustada para a/W = 0,70 65
3.20 Curva ajustada para a/W = 0,75 65
3.21 Curva ajustada para a/W = 0,80 66
3.22 Curva ajustada para a/W = 0,85 67
3.23 Curva ajustada para $K_I(a/W)$ 68

4.1 Corpo de prova utilizado (Dimensões em mm) 71
4.2 Traçador de altura utilizado 72
4.3 Corpo de prova após o processo de riscagem 72
4.4 *Clip gauge* conectado ao corpo de prova 73
4.5 Configuração do software *Fatigue Crack Propagation* 73
4.6 Acompanhamento dos ensaios com o software *Fatigue Crack Propagation* 74
4.7 Variação da flexibilidade da peça ao longo dos ciclos de carregamento 74
4.8 Posicionamento das câmeras 75
4.9 Imagens da câmera 1 (a) e câmera 2 (b), obtidas durante os ensaios . 75
4.10 Corpo de prova 01 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 4,0mm 76
4.11 Corpo de prova 02 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 3,5mm 76
4.12 Corpo de prova 03 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 3,5mm 77

5.1 Curva típica de CMOD durante o ensaio 78
5.2 Resultados de CMOD (mm) 79
5.3 Taxa de crescimento do CMOD (mm) 79
5.4 Distribuições lognormais de N_i, $N_{\overline{p}}$ e a_f, estimadas experimentalmente 80
5.5 Distribuições lognormais de N_i, N_p, N_t e $N_{\overline{p}}$, estimadas numericamente 81
5.6 Probabilidade de falha e índice β para g_1 (associada à iniciação da trinca) 82
5.7 Probabilidade de falha e índice β para g_2 (associada à propagação da trinca) 82
5.8 Comparação de N_i estimado numericamente e experimentalmente . . 84
5.9 Comparação de $N_{\overline{p}}$ estimado numericamente e experimentalmente . . 84

Lista de Tabelas

2.1 Valores de C_p e m_p para alguns tipos de aço (ΔK em $\sqrt{MPa \times m}$) (BARSOM e ROLFE, 1999) . . . 25
2.2 Posição dos pontos de Gauss e seus pesos, para $2 \leq n \leq 5$ (ROSA, 2010) . . . 40

3.1 Variáveis aleatórias adotadas . . . 51
3.2 Números de ciclos associados à iniciação e propagação – Ruptura por fratura . . . 52
3.3 Propriedades do material . . . 55
3.4 Resultados para a/W = 0,55 . . . 62
3.5 Resultados para a/W = 0,60 . . . 63
3.6 Resultados para a/W = 0,65 . . . 64
3.7 Resultados para a/W = 0,70 . . . 64
3.8 Resultados para a/W = 0,75 . . . 65
3.9 Resultados para a/W = 0,80 . . . 66
3.10 Resultados para a/W = 0,85 . . . 66
3.11 Resultados obtidos para $K_I(a/W)$ . . . 67
3.12 Variáveis aleatórias adotadas . . . 69

4.1 Propriedades mecânicas do aço ASTM A36 (ASTM, 2014, p. 2) . . . 71

5.1 Resumo dos resultados da análise experimental . . . 80
5.2 Resumo dos resultados da análise numérica . . . 81
5.3 Comparação dos valores numéricos médios, numéricos *target* e experimentais . . . 83
5.4 Comparação dos valores numéricos com aplicação de fator de segurança = 3,0 e experimentais . . . 85

Lista de Abreviaturas

AASHTO	*The American Association of State Highway Transportation Officials*, p. 29
ABS	*American Bureau of Shipping*, p. 28
API	*American Petroleum Institute*, p. 84
ASTM	*American Society for Testing and Materials*, p. 1
BSI	*British Standard Institute*, p. 30
CBCA	Centro Brasileiro da Construção em Aço, p. 70
EPD	Estado plano de deformações, p. 20
EPT	Estado plano de tensões, p. 15
HSE	*Health and Safety Executive*, p. 31
JCSS	*Joint Committee on Structural Safety*, p. 31
ABS	*American Bureau of Shipping*, p. 32
CMOD	*Crack Mouth Opening Displacement*, p. 77
CNE	*Comité Européen de Normalisation*, p. 30
CT	*Compact Tension*, p. 58
MEF	Método dos Elementos Finitos, p. 3
MFEP	Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, p. 18
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica, p. 3

Capítulo 1

Introdução

Antes da introdução das máquinas a vapor, durante a Revolução Industrial, as estruturas eram submetidas a cargas majoritariamente estáticas. As falhas de componentes estruturais ocorriam pela ruptura da seção causada por carregamentos monotônicos, que ocasionavam tensões superiores à tensão de ruptura do material.

A ocorrência de falha de componentes estruturais devido a cargas variáveis foi documentada pela primeira vez no início do século 19, pelo engenheiro alemão ALBERT (1838), ao estudar a falha em correntes de ferro submetidas a carregamentos cíclicos. Alguns anos depois, RANKINE (1843) descreveu a causa das rupturas como uma fragilização do material causada pela flutuação de tensões. O termo fadiga foi introduzido por PONCELET (1839). A norma E1823 (ASTM, 2013, p. 8, tradução nossa) define fadiga como:

> Um processo progressivo e localizado de alterações estruturais em um material submetido a condições que produzem tensões e deformações variáveis, que pode culminar em trincas e fratura do componente após um número de ciclos suficiente. [1]

Neste trabalho, estuda-se duas metodologias largamente utilizadas para determinação de vida à fadiga: as teorias de Wöhler (seção 2.2) e Paris (seção 2.3). Essas teorias divergem na sua história e modelagem, mas descrevem o mesmo fenômeno: o processo de fadiga dos materiais. Enquanto Wöhler trata da análise de peças não trincadas, avaliando as fases de iniciação e propagação de uma trinca, Paris trata de peças pré-trincadas, dedicando-se ao estudo da propagação dessas.

Este trabalho foi motivado pela publicação de WU e CHEN (2017), na qual foi analisada a estrutura de uma turbina eólica *offshore*, comparando a vida útil obtida pelas duas metodologias. Em seu estudo, os pesquisadores estipularam um comprimento inicial de trinca para a análise segundo a teoria de Paris, e verificaram

---

[1] Texto original: "*The process of progressive localized permanent structural change occurring in a material subjected to conditions that produce fluctuating stresses and strains at some point or points and that may culminate in cracks or complete fracture after a sufficient number of fluctuations.*"

a influência dos parâmetros da curva de propagação nos resultados obtidos. Mais detalhes são apresentados na seção 2.4.5.

Apresenta-se uma proposta de metodologia para estimativa de número de ciclos associados às fases de iniciação e propagação de trincas de fadiga em materiais metálicos, aplicando conceitos das duas teorias. Em ambas, existem incertezas, e portanto, uma análise de confiabilidade foi realizada. Estudos experimentais foram realizados para validar a metodologia proposta.

O emprego de análise de confiabilidade na iniciação de trincas já foi investigado por HARKNESS *et al.* (1992), GROOTEMAN (2008) e MOHAMMADZADEH *et al.* (2013). O diferencial da metodologia proposta é a aplicação das teorias de Wöhler e Paris para determinação das frações da vida útil associadas à iniciação e propagação da trinca.

1.1 Motivação

Defeitos resultantes dos processos de fabricação são inerentes aos componentes e estruturas de engenharia. A dimensão desses defeitos pode variar da ordem de mícrons, como no caso de inclusões não metálicas em metais, a milímetros como no caso de zonas termicamente afetadas por processos de soldagem (HUSSAIN, 1997). A partir desses defeitos, podem ser nucleadas trincas que se propagam até o colapso do componente estrutural, majoritariamente com ciclos de tensão abaixo da tensão de escoamento do material.

As falhas por fadiga constituem um custo significativo para a economia e para a sociedade. Um relatório elaborado por REED *et al.* (1983) sugere que no início dos anos 80, a ocorrência e a prevenção de falhas por fadiga custava ao governo americano cerca de US$ 100 bilhões anuais, correspondendo a aproximadamente 3% do PIB do país. Segundo PUGNO *et al.* (2007), a estimativa da vida à fadiga, apesar de um assunto com mais de 150 anos de história, ainda é bastante empírico.

Comumente, estruturas submetidas ao fenômeno de fadiga são submetidas a inspeções não destrutivas periódicas. Segundo JANBU (2005), um plano de inspeção baseado no risco de falha resultará em uma redução significativa nos custos operacionais e de inspeção. Nesse contexto, a estimativa do número de ciclos associado à nucleação de trincas de fadiga pode auxiliar na otimização do planejamento destas inspeções, reduzindo custos associados a inspeções precoces, que têm uma probabilidade baixa de encontrar defeitos nessas peças.

1.2 Objetivo

O objetivo geral deste trabalho é estimar o número de ciclos associado à iniciação de trincas de fadiga em estruturas metálicas submetidas a flutuação de tensões, e o número associado à propagação destas, mediante simulação computacional.

Os objetivos específicos incluem:

- a análise linear estática da estrutura, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), para estimativa do fator de concentração de tensões e da função de forma para a geometria em questão;
- implementação de um código em *Python* para análise de confiabilidade aplicada ao problema de iniciação e propagação de trincas de fadiga;
- a realização de experimentos para verificar a metodologia proposta.

1.3 Organização do trabalho

O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão da literatura. Os conceitos chave necessários para o entendimento das teorias de Paris e Wöhler são expostos; e algumas publicações recentes com propostas de utilização de ambas as teorias são revistas. Como análises utilizando o MEF foram necessárias para auxiliar a metodologia proposta, uma seção deste Capítulo foi destinada à teoria do MEF e sua aplicação para a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Além disto, uma seção foi destinada a apresentar os conceitos básicos de confiabilidade estrutural.

O Capítulo 3 destina-se a apresentar o modelo numérico proposto, bem como alguns estudos de caso, um dos quais foi utilizado como base para os ensaios realizados.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia dos ensaios realizados para validar a hipótese apresentada.

No Capítulo 5 constam os resultados obtidos, tanto para a análise numérica realizada, quanto para a análise experimental, e algumas breves discussões.

As conclusões deste trabalho são apresentadas no Capítulo 6, bem como as sugestões para trabalhos futuros.

O Apêndice A apresenta o código elaborado em *Python* para a análise de confiabilidade. Os dados experimentais obtidos (após tratamento dos dados básicos) são listados no Apêndice B.

Capítulo 2

Revisão da literatura

2.1 O fenômeno de fadiga em metais

O processo de falha por fadiga ocorre em três estágios: nucleação da trinca, propagação e ruptura final. O estágio I compreende a fase de nucleação, que é controlada por deformações plásticas cíclicas localizadas no material. A iniciação de uma trinca ocorre de forma inter ou transgranular, em regiões da microestrutura com concentradores de tensão como contornos de grão, inclusões não metálicas, ou bandas de deslizamento, sendo o último tipo o mais frequente (LUKÁŠ, 1996, p. 236).

A taxa de propagação no estágio I é geralmente muito pequena, da ordem de angstrõns por ciclo, comparada com as taxas de propagação do estágio II, da ordem de mícrons por ciclo (DIETER, 1981, p. 356). Este estágio não é visível a olho nu na superfície da fratura, pois normalmente não se estende por mais de 2 a 5 grãos.

Após a nucleação, a microtrinca se propaga no estágio I nas bandas de deslizamento, inclinadas de aproximadamente 45° em relação ao plano de aplicação das tensões principais. O crescimento é regido por tensões cisalhantes cíclicas na ponta da trinca (KUNKLER *et al.*, 2008, p. 716). A Figura 2.1 apresenta a evolução de bandas de deslizamento durante o carregamento cíclico de uma liga de cobre.

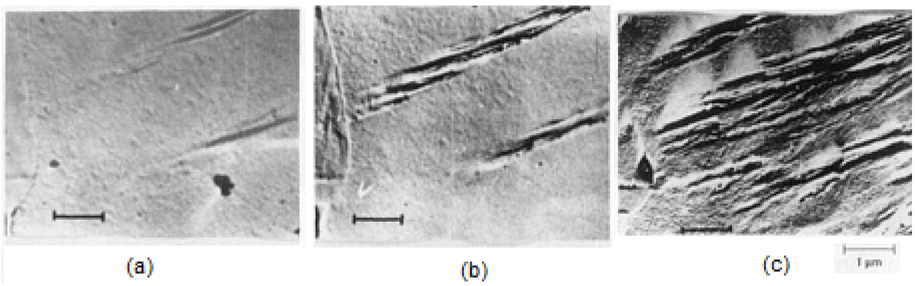


Figura 2.1: Bandas de deslizamento em uma liga de cobre, para (a) $5{\times}10^3$ ciclos, (b) $1{\times}10^4$ ciclos e (c) $1{\times}10^5$ ciclos (adptada de LUKÁŠ, 1996, p. 237)

A maior parte das microtrincas normalmente é formada durante os primeiros 20 a 40% da vida total à fadiga (LUKÁŠ, 1996, p. 238). Diversos grãos, com orientações cristalográficas diferentes, são percorridos durante a propagação da trinca, resultando em um caminho com formato de ziguezague. Bandas de deslizamento adicionais são ativadas e a trinca se propaga alternando entre duas bandas, conforme ilustrado na Figura 2.2. O efeito dos dois planos de deslizamento altera a direção de propagação para perpendicular ao plano das tensões principais.

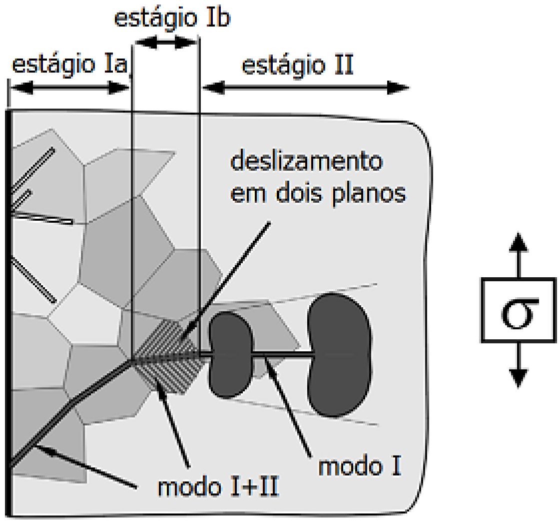


Figura 2.2: Transição do estágio I para o estágio II de propagação (adptada de KUNKLER *et al.*, 2008, p. 716)

Com o avanço da trinca, a concentração de tensão na ponta aumenta e mais bandas de deslizamento são ativadas, aumentando a plasticidade local. A influência da microestrutura é reduzida até que a trinca não seja mais classificada como curta, e seu comportamento seja descrito pela MFLE ou MFEP. A Figura 2.3 apresenta uma micrografia com as primeiras microtrincas formadas na superfície de uma liga de cobre. SURESH e RITCHIE (1984, p. 448) apresentaram três definições para microtrincas:

- Trincas cuja dimensão é da mesma ordem de grandeza da microestrutura do material (da ordem do tamanho dos grãos, por exemplo);
- Trincas cuja dimensão é da mesma ordem de grandeza da zona plástica localizada;
- Trincas de dimensão de 0,5 a 1,0mm.

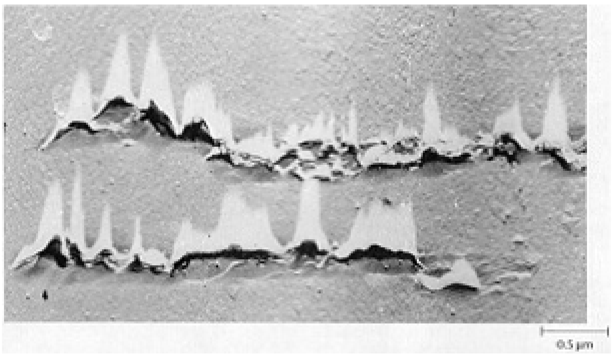


Figura 2.3: Micrografia com as primeiras microtrincas formadas na superfície de uma liga de cobre (LUKÁŠ, 1996, p. 237)

Acredita-se largamente que em estruturas ou componentes com bom acabamento superficial, 90 a 95% da vida total à fadiga de uma estrutura é atribuída ao estágio I, estatística corroborada por diversos pesquisadores, como WANG *et al.* (1999) e MEIER e GEROLD (1987). O estágio II engloba a propagação das trincas, onde o crescimento ocorre no plano perpendicular às tensões principais de tração. A superfície de fratura do estágio II apresenta frequentemente a formação de estrias de fadiga, que representam a posição sucessiva de uma frente da trinca conforme ocorre a propagação. Cada ciclo de variação de tensões produz uma estria. O processo de propagação de trincas é descrito por LAIRD (1967, apud DIETER, 1981, p. 356) como:

> O estágio II de propagação de trinca ocorre por um processo plástico. No início do carregamento cíclico, a ponta da trinca é aguda. À medida que o esforço de tração é aplicado, o pequeno entalhe duplo na ponta da trinca concentra o deslizamento ao longo dos planos que fazem 45° com o plano da trinca. À proporção que a trinca se alarga para sua extensão máxima, ela caminha ainda mais por cisalhamento plástico, ao mesmo tempo que sua ponta se torna rombuda[1]. Quando a carga muda para compressão, as direções de deslizamento na extremidade são invertidas, as faces da trinca são compactadas e a nova superfície da trinca, criada na tração, é forçada para o plano da trinca onde é parcialmente dobrada por flambagem formando uma ponta de trinca novamente aguda. Desta forma, a trinca está pronta para avançar e se tornar rombuda no próximo ciclo de tensões.

A Figura 2.4 apresenta um resumo do processo de formação de estrias de fadiga e a Figura 2.5 exibe estrias de fadiga na parede de uma tubulação.

[1]Rombudo: Muito mal aguçado, que penetra dificilmente. (FERREIRA, 2000)

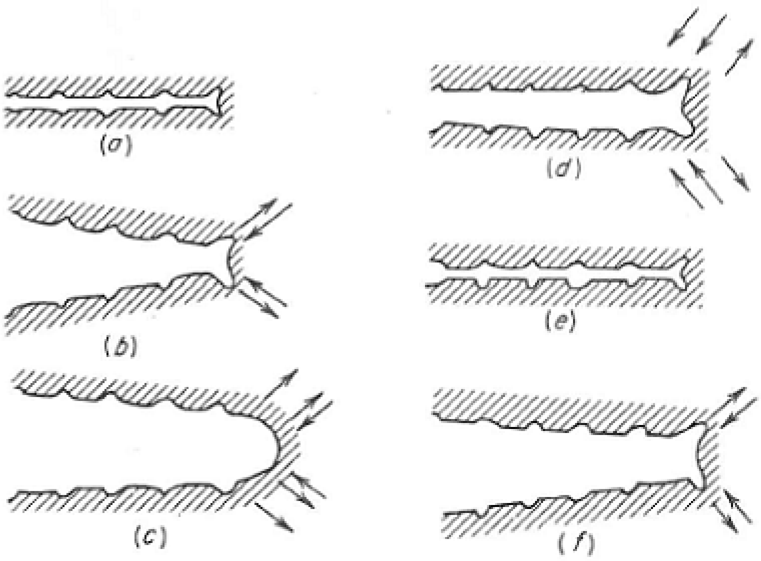


Figura 2.4: Processo de propagação de trincas e a formação de estrias de fadiga (LAIRD, 1967, p. 136)

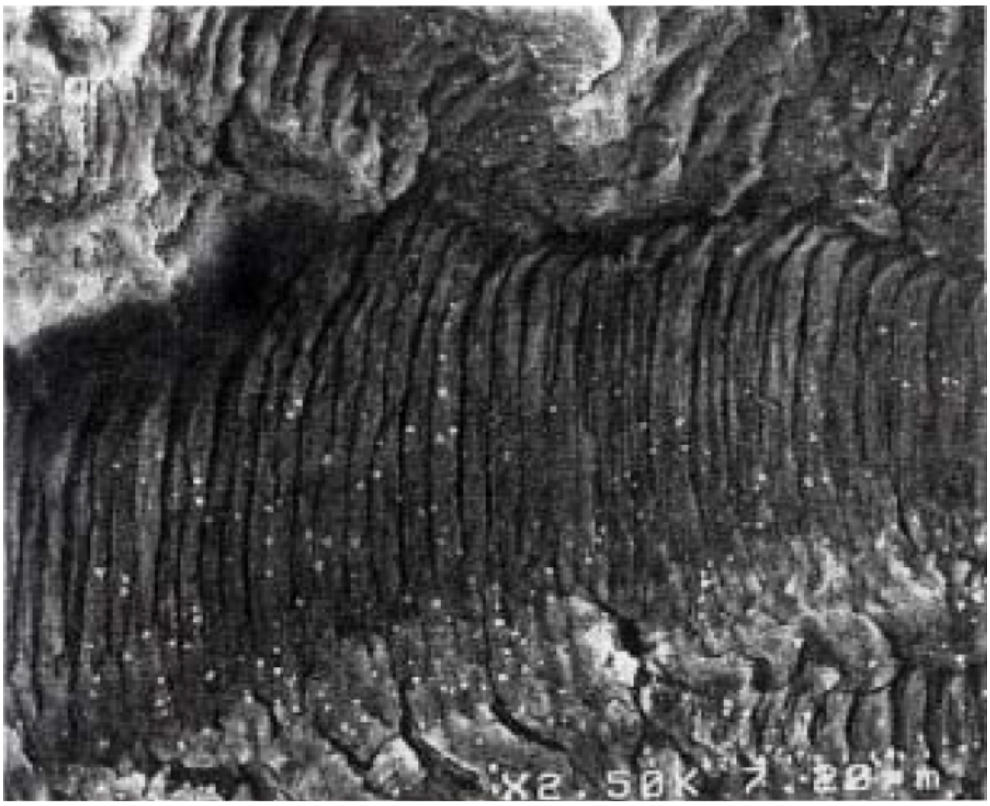


Figura 2.5: Estrias de fadiga na parede de uma tubulação (FERREIRA, 2013)

O estágio III corresponde à fratura que ocorre no último ciclo de tensões quando a trinca desenvolvida progressivamente atinge o tamanho crítico para propagação instável. A Figura 2.6 apresenta a superfície de fratura de uma peça submetido a tensões cíclicas, onde são visíveis as regiões de nucleação, propagação e ruptura final.

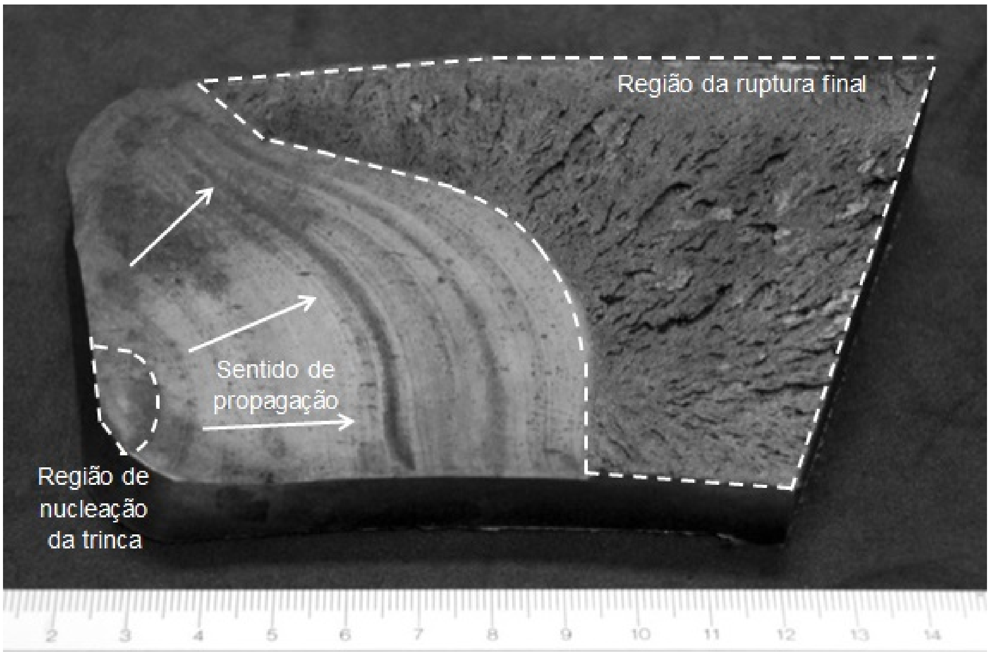


Figura 2.6: Superfície de fratura de uma peça, destacadas as regiões de nucleação e ruptura final (régua em mm)

As próximas seções são destinadas às metodologias para estimativa da vida à fadiga.

2.2 A teoria de Wöhler

2.2.1 A curva S-N

No século XIX, WÖHLER (1860) investigou um acidente envolvendo o eixo de uma locomotiva de um trem, ocorrido em Versailles, na França, e realizou diversos testes em corpos de prova submetidos à variação de tensões. Wöhler foi consagrado como o primeiro pesquisador a estudar o fenômeno de fadiga, e propor uma formulação empírica para a determinação da vida à fadiga. Como resultado de sua pesquisa, Wöhler propôs a metodologia que depois foi conhecida como Curva S-N, curvas que relacionam a variação de tensão e o número de ciclos até a falha, englobando os estágios de nucleação, propagação e fratura final. Em 1910, BASQUIN definiu a forma de uma curva S-N típica e propôs uma relação log-log, descrita pelos parâmetros C_w e m_w[2], que é esquematizada na Figura 2.7.

[2]Na literatura, C_w e m_w são usualmente definidos como a e m, respectivamente. Definiu-se como C_w e m_w neste trabalho para diferenciar das demais grandezas representadas por a e m.

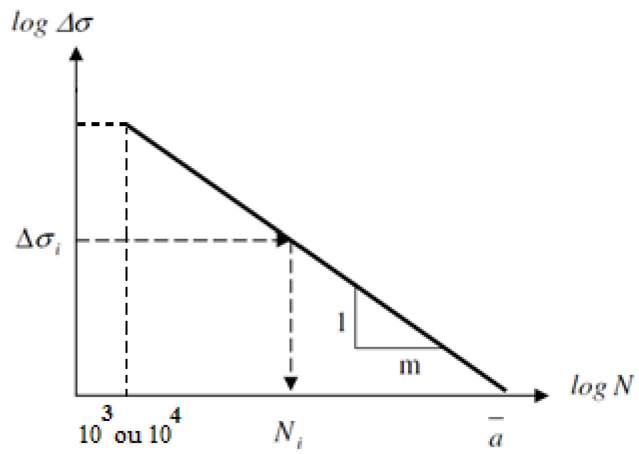


Figura 2.7: Representação esquemática de uma Curva S-N (BATALHA, 2009)

2.2.2 Concentração de tensões e tensões de "hot-spot"

Descontinuidades geométricas em uma estrutura alteram a distribuição inicial de tensões do elemento. Nessas regiões, denominadas regiões de concentração de tensões, as tensões próximas à fronteira da descontinuidade são superiores à tensão média da seção. Variações bruscas de seção, orifícios e entalhes são exemplos dessas regiões. O fator de concentração de tensões, K_t, é definido como a razão entre a tensão máxima na descontinuidade e a tensão nominal σ_{nom} na seção. A Figura 2.8 apresenta a concentração de tensões em uma chapa com furo.

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \tag{2.1}$$

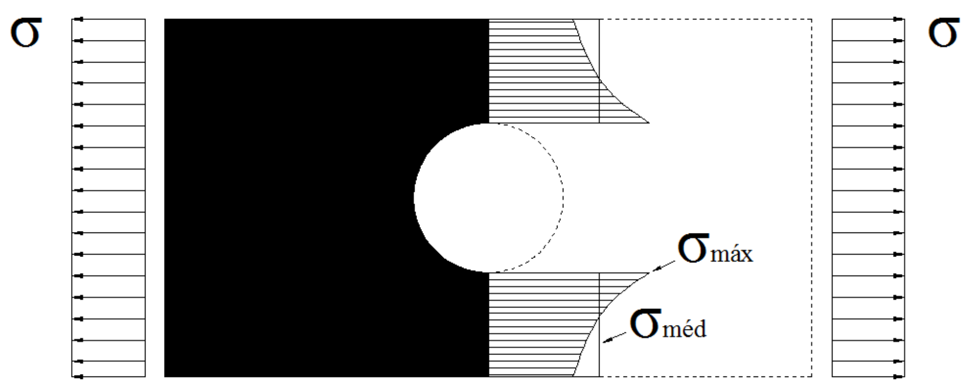


Figura 2.8: Concentração de tensões em uma placa com orifício

No caso de geometrias simplificadas, diversas equações paramétricas para K_t são encontradas na literatura, como na publicação de YOUNG *et al.* (2011). Para geometrias cuja avaliação por equações paramétricas é complicada, é comum a avaliação com modelos em elementos finitos. Um exemplo de modelo em elementos finitos para determinação do K_t em uma geometria complexa é apresentado na Figura 2.9.

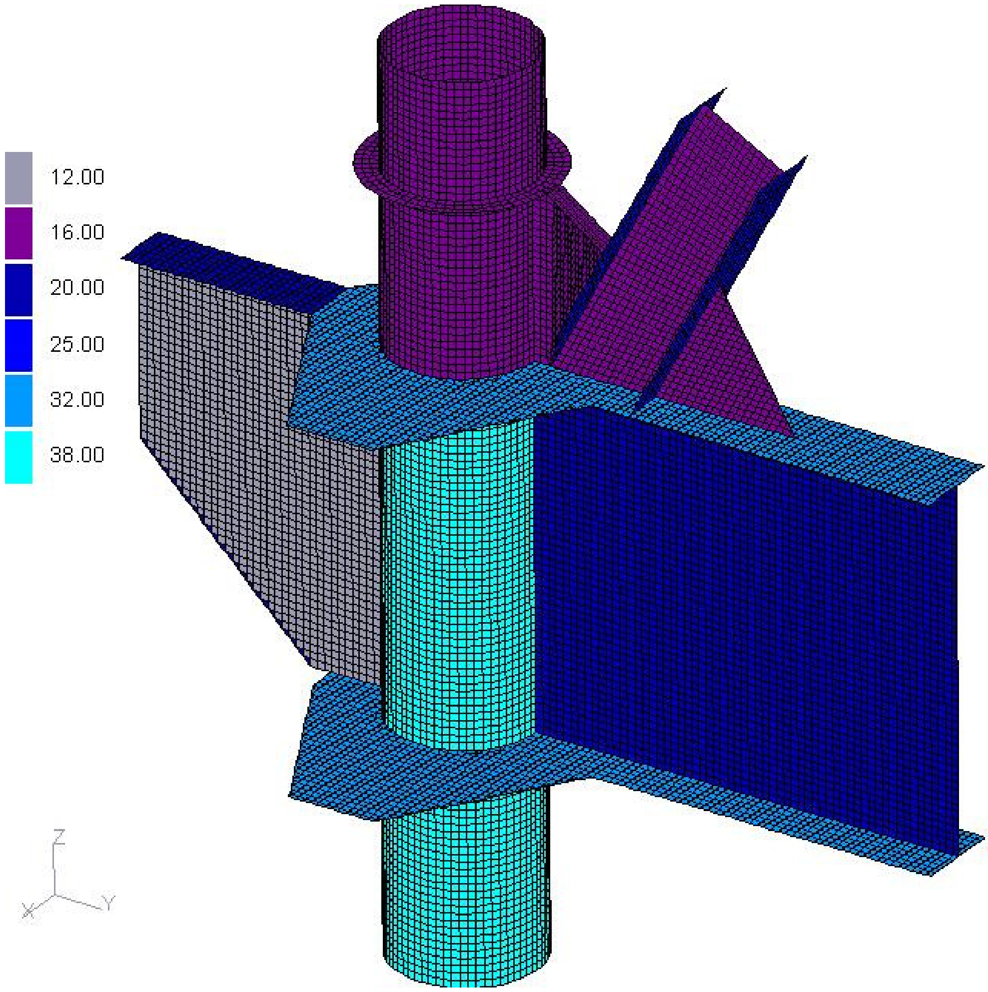


Figura 2.9: Exemplo de modelo em elementos finitos para determinação do K_t (BATALHA, 2009)

A metodologia utilizada neste trabalho é baseada na publicação de HODHIGERE *et al.* (2017). A integral das tensões ao longo da seção numa região de descontinuidades é igual à integral da tensão nominal, uma vez que o esforço (força+momentos) aplicado é o mesmo, independente da descontinuidade. Dessa forma, a tensão nominal pode ser aproximada conforme a equação 2.2.

$$\sigma_{nom} = \begin{cases} \dfrac{A_{Kt}}{D}, \text{para esforços axiais} \\ \dfrac{2A_{Kt}}{D_n}, \text{para flexão no plano} \end{cases} \tag{2.2}$$

sendo A_{Kt} a integral das tensões, D a distância utilizada na integral e D_n a distância até a linha neutra. A integral das tensões pode ser aproximada pelo método trapezoidal, pela equação 2.3. A Figura 2.10 apresenta um esquema das grandezas utilizadas na metodologia.

$$A_{Kt} \approx \sum_x A_{Kt,i} = \sum_x \frac{\sigma(x) + \sigma(x-1)}{2} \times [D(x) - D(x-1)] \tag{2.3}$$

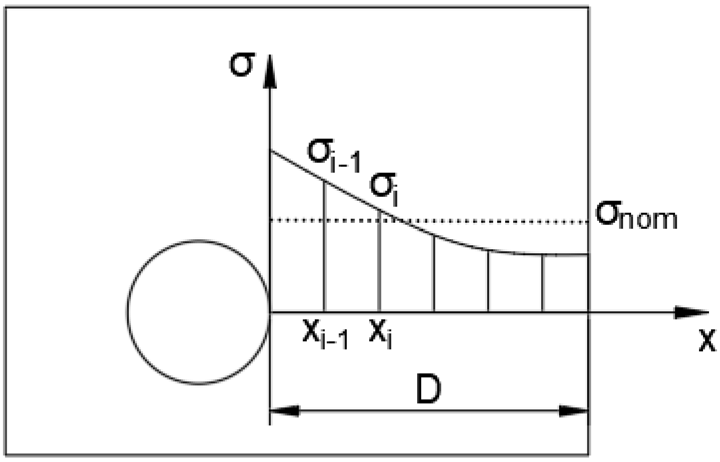


Figura 2.10: Estimativa da tensão nominal através das tensões obtidas por elementos finitos (adaptada de HODHIGERE *et al.*, 2017, p. 4)

De posse da tensão nominal, o K_t é estimado através da equação 2.1. O método trapezoidal é menos preciso que a integral das tensões propriamente dita (HODHIGERE *et al.*, 2017), porém é facilmente implementado através de planilhas ou códigos. Hodhigere *et al.* apresentam em sua publicação uma comparação dos valores obtidos segundo essa metodologia e valores analíticos, para geometrias cuja solução analítica se encontra disponível na literatura. Os valores estimados divergiam de 3% a 5% das soluções analíticas.

O valor da tensão máxima atuante em uma região de descontinuidade é chamado de *Hot-Spot Stress*, apresentada na Figura 2.11 para uma junta soldada. Na análise por curvas S-N, a tensão a ser informada no eixo das ordenadas é a tensão de *hot-spot* (DNV, 2012).

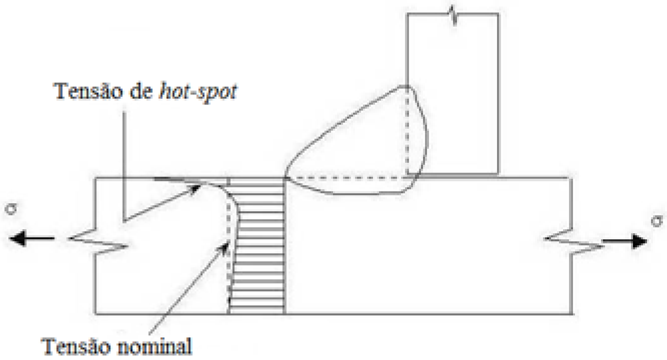


Figura 2.11: Tensão de hot-spot em uma junta soldada (MOŽE, 2015)

2.2.3 Tensão média diferente de zero

A Figura 2.12 apresenta um carregamento cíclico de amplitude constante, onde se pode definir os seguintes parâmetros:

- Tensão máxima, σ_{max}: tensão de maior valor durante o ciclo de carregamento;
- Tensão mínima, σ_{min}: tensão de menor valor durante o ciclo de carregamento;
- Razão de tensão, R: Razão entre a tensão mínima e a tensão máxima
- Amplitude de tensão, $\Delta\sigma$: diferença algébrica entre as tensões máxima e mínima;
- Tensão média, σ_m: média aritmética entre as tensões máxima e mínima;

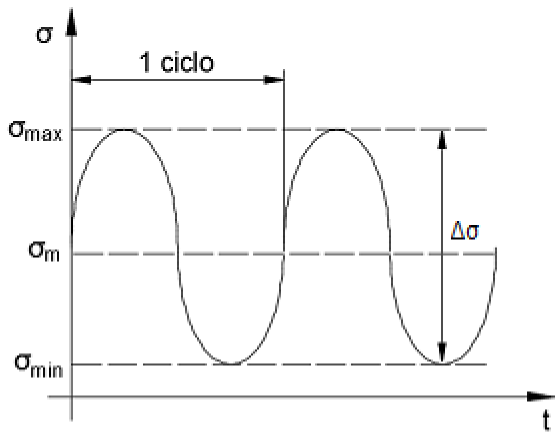


Figura 2.12: Parâmetros de um carregamento cíclico de amplitude constante

As curvas S-N são geradas, em sua maioria, para carregamentos onde a tensão média é igual a zero (COLLINS *et al.*, 2009). Entretanto, a maioria das situações práticas envolve a combinação de uma solicitação estática com uma solicitação cíclica, gerando um carregamento onde a tensão média é diferente de zero (BRANCO *et al.*, 1986). Segundo SCHIJVE (2008), com o aumento da tensão média, a vida à fadiga do componente é reduzida.

Para o caso de carregamentos com tensão média diferente de zero, as relações de GERBER (1874), GOODMAN (1899) e SODERBERG (1930) são aplicáveis para obter uma amplitude de tensão equivalente. Essas relações são apresentadas nas equações 2.4, 2.5 e 2.6, respectivamente.

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{fat}\left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{F_u}\right)^2\right] \tag{2.4}$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{fat}\left(1 - \frac{\sigma_m}{F_u}\right) \tag{2.5}$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{fat}\left(1 - \frac{\sigma_m}{F_y}\right) \tag{2.6}$$

sendo σ_m a tensão média, $\Delta\sigma$ a amplitude de tensão atuante com σ_m diferente de zero, $\Delta\sigma_{fat}$ a amplitude de tensão equivalente, F_u e F_y as tensões última e de escoamento do material, respectivamente. A Figura 2.13 apresenta uma comparação entre as três equações.

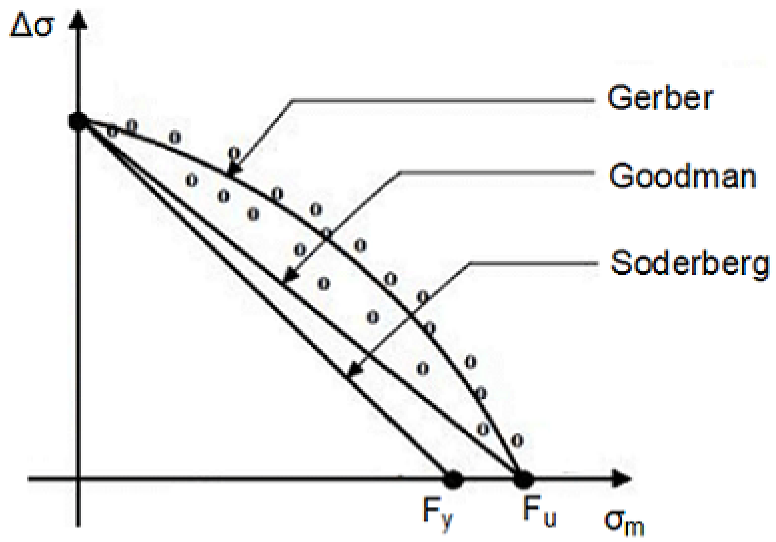


Figura 2.13: Comparação entre as curvas de Gerber, Goodman e Soderberg (adaptada de BRANCO *et al.*, 1986)

Segundo BRANCO *et al.* (1986), a maioria dos dados experimentais estão compreendidos entre a parábola de Gerber e a reta de Goodman. BAI e BAI (2005) afirmam que a relação de Goodman ajusta-se bem a resultados experimentais para ligas frágeis mas é muito conservadora para ligas dúcteis. Ademais, enquanto a relação de Soderberg fornece uma estimativa conservadora da vida à fadiga para a maioria das ligas, a relação de Gerber apresenta bons resultados para para ligas dúcteis.

2.3 A teoria de Paris

2.3.1 Balanço energético de Griffith

Baseado na Primeira Lei da Termodinâmica, GRIFFITH (1921) observou que a introdução de uma trinca em um corpo tracionado causa um decréscimo em sua energia potencial, relacionado à liberação de energia elástica armazenada. Em contrapartida, há uma resistência do material à propagação da trinca, representada por energia de superfície, deformação plástica ou outros tipos de energia associadas à propagação de trincas.

De acordo com GRIFFITH (1921, p. 166, tradução nossa):

> Uma trinca é formada pela retirada súbita dos esforços de tração atuantes em sua superfície. No instante após a propagação da trinca, a deformação e, por consequência, a energia potencial mantêm seus valores originais; mas, em geral, o novo estado de energia é de não equilíbrio. Se o estado é de não equilíbrio, pelo Princípio da Energia Potencial Mínima, a energia potencial do corpo é reduzida para alcançar o equilíbrio.[3]

Consideremos uma chapa infinita de espessura t submetida a uma tensão remota constante σ, na qual foi introduzida uma trinca centralizada de comprimento $2a$, conforme esquematizado na Figura 2.14. Uma chapa infinita é uma chapa na qual a largura desta é muito maior que o comprimento da trinca $2a$.

[3]Texto original: "*It may be supposed, for the present purpose, that the crack is formed by the sudden annihilation of the tractions acting on its surface. At the instant following this operation, the strains, and therefore the potential energy under consideration, have their original values; but, in general, the new state is not one of equilibrium. If it is not a state of equilibrium, then, by the theorem of minimum energy, the potential energy is reduced by the attainment of equilibrium* [...]".

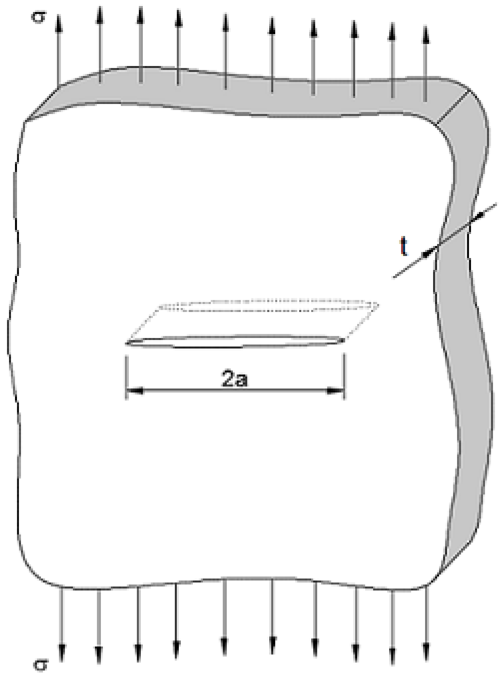


Figura 2.14: Placa infinita submetida a tensão remota (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 30)

Assumindo que o material se encontre no regime linear elástico sob o Estado Plano de Tensões (EPT), o balanço energético proposto por Griffith para um aumento infinitesimal da área da trinca pode ser descrito como:

$$\frac{dU}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} \tag{2.7}$$

onde U é a energia total, A é a área da trinca, Π é a energia potencial elástica e W_s é o trabalho necessário para criar novas superfícies.

Em equilíbrio, temos:

$$\begin{gathered} \frac{dU}{dA} = 0 \ \text{ ou} \\ \frac{dU}{dA} = -\frac{dW_s}{dA}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Griffith utilizou a teoria de INGLIS (1993) para mostrar que:

$$\Pi = -\frac{\pi\sigma^2 a^2 t}{E} \tag{2.9}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material.

A formação de uma trinca requer a criação de duas superfícies, e portanto, segundo ANDERSON (2005, p. 30), W_s é expresso como:

$$W_s = 4at\gamma_s \tag{2.10}$$

sendo γ_s a energia de superfície do material. Dessa forma,

$$\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \tag{2.11}$$

e

$$\frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s. \tag{2.12}$$

Substituindo na equação 2.8, podemos escrever uma condição para fratura do material.

$$\frac{\pi\sigma^2 a}{E} > 2\gamma_s \tag{2.13}$$

A equação 2.13 foi consagrada como o *Balanço energético de Griffith*. Esse balanço energético pode ser esquematizado conforme a Figura 2.15, na qual são exibidas as duas parcelas de energia da equação 2.7 e a soma destas em função do comprimento de trinca $2a$. Também é apresentada a derivada $dU/d(2a)$. O crescimento instável da trinca ocorrerá quando a liberação de energia elástica devido a um incremento infinitesimal de trinca, $d(2a)$, superar a demanda de energia de superfície necessária para o mesmo incremento de trinca.

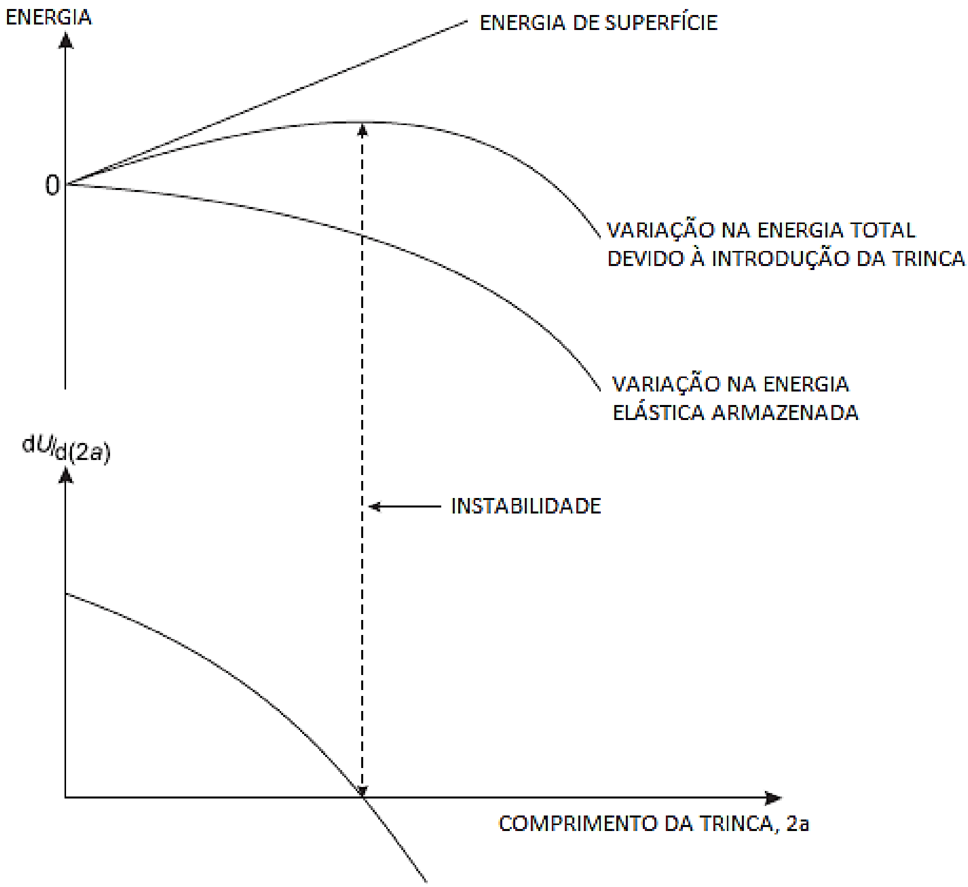


Figura 2.15: Balanço energético para a placa da Figura 2.14 (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 11)

IRWIN (1957) designou o lado esquerdo da equação 2.13 como a força motriz para crescimento da trinca, ou a taxa de liberação de energia durante sua propagação, representada por G. O lado direito representa a resistência ao crescimento da trinca, ou a taxa de aumento na energia de superfície durante sua propagação, representada por R_b[4]. Do balanço energético temos que a fratura ocorre quando $G > R_b$.

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} > R_b = 2\gamma_s \tag{2.14}$$

Em materiais frágeis, a propagação de trincas ocorre devido apenas à quebra de ligações atômicas, e a resistência à propagação de trincas é expressa puramente por γ_s. Para esses materiais, a metodologia proposta por Griffith é válida. No caso de materiais metálicos, ocorre a movimentação de discordâncias na região da ponta da trinca e consequentemente uma deformação plástica localizada. A teoria de Giffith não condiz com os resultados experimentais para esses materiais.

Nos anos 40, IRWIN (1948) e OROWAN (1948) sugeriram, de forma independente, uma modificação na teoria de Griffith para englobar materiais capazes

[4]Na literatura, R_b é definido como R. Definiu-se como R_b neste trabalho para diferenciar das demais grandezas representadas por R.

de sofrer deformação plástica. A modificação consistiu na adição do trabalho realizado durante a plastificação localizada, representado pelo termo γ_p, à resistência do material à propagação de trincas. Para materiais relativamente dúcteis, $\gamma_p \gg \gamma_s$.

$$R_b = 2\left(\gamma_s + \gamma_p\right) \tag{2.15}$$

Apesar de englobar uma gama maior de materiais, essa teoria é limitada a materiais cuja plasticidade na ponta da trinca é localizada. Para materiais que apresentam plasticidade generalizada, a abordagem deve ser através da Mecânica da Fratura Elasto-Plástica (MFEP).

2.3.2 Abordagem por intensidade de tensões

A abordagem por balanço de energia apresentada na seção 2.3.1 foi a primeira a ser desenvolvida no campo da Mecânica da Fratura. Na década de 50, IRWIN (1957) desenvolveu a abordagem conhecida como abordagem por intensidade de tensões. Com base na Teoria da Elasticidade, Irwin mostrou que o campo de tensões em um elemento infinitesimal à frente da trinca, para a geometria da Figura 2.14 e um material elástico pode ser descrito como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{xx}} \\ \sigma_{\mathrm{yy}} \\ \tau_{\mathrm{xy}} \end{pmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \cos\theta/2 \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \frac{K}{\sqrt{2\pi r}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

onde r e θ são as coordenadas polares do elemento, apresentadas na Figura 2.16, e K é uma grandeza relacionada à magnitude do campo de tensões, denominada fator de intensidade de tensões. O fator de intensidade de tensões é função da tensão aplicada remotamente à peça, do comprimento da trinca, da geometria do corpo e do modo de carregamento.

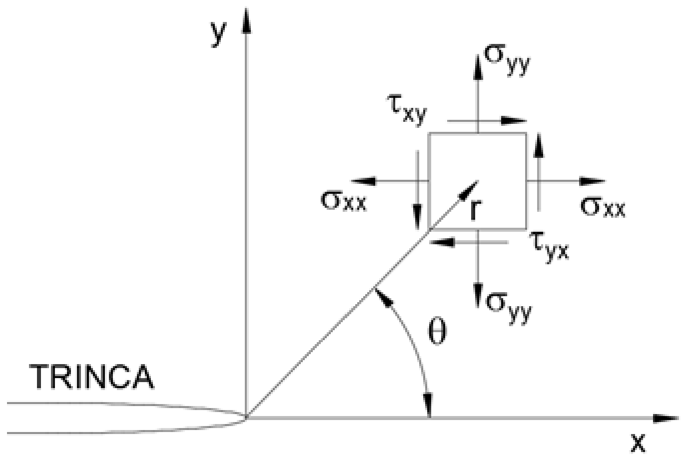


Figura 2.16: Coordenadas polares de um elemento à frente da trinca (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 43)

Os três principais modos de carregamento são apresentados na Figura 2.17. No modo I, a tensão principal é normal ao plano da trinca; nesse modo as faces da trinca se afastam. No modo II, a tensão aplicada é cisalhante e as faces da trinca tendem a deslizar. Já o modo III é referente ao cisalhamento fora do plano da trinca (ANDERSON, 2005, p. 43). Os três modos podem atuar juntos ou separadamente.

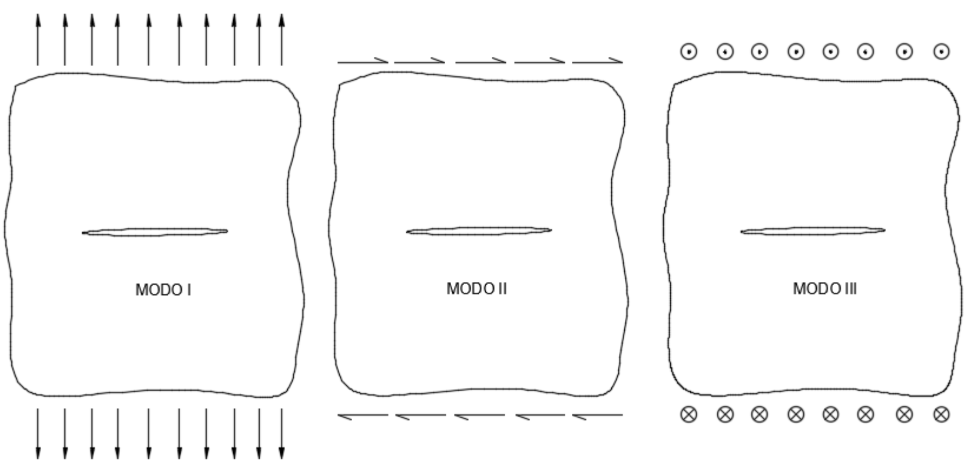


Figura 2.17: Principais modos de fratura

No modo I, o fator de intensidade de tensões é expresso como:

$$K_I = f\,(a/W)\,\sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.17}$$

onde $f(a/W)$ é chamado de fator de forma, uma função da geometria do corpo. Para a geometria da Figura 2.14, $f(a/W) = 1$. A fratura ocorre quando o valor de K_I atinge a tenacidade à fratura do material, denominada por K_{IC}, obtida experimentalmente. Uma análise matemática das equações 2.13 e 2.54 fornece a relação entre as duas abordagens.

$$G = \frac{K^2}{E} \tag{2.18}$$

2.3.3 Plasticidade na ponta da trinca

A partir do campo de tensões apresentado por IRWIN (1957) (equação 2.16), a tensão σ_{yy} no plano da trinca ($\theta = 0$) para o modo I é expressa como:

$$\sigma_{\mathrm{yy}} = \frac{{K_{\mathrm{I}}}^2}{\sqrt{2\pi r}} \tag{2.19}$$

A tensão tende ao infinito quando r tende a zero, ou seja, nas proximidades da ponta da trinca. Entretanto, os materiais suportam apenas uma tensão finita antes de entrarem em escoamento. A ponta da trinca apresenta uma região deformada plasticamente.

A distribuição de tensões corrigida pela plasticidade na ponta da trinca é apresentada na Figura 2.18. IRWIN (1961) considerou uma zona plástica circular à frente da trinca, cujo raio pode ser determinado substituindo a tensão σ_{yy} por F_y na equação 2.19 e resolvendo para r:

$$\begin{aligned} r_y &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{K_I}{F_y} \right)^2 \; no\, EPT \\ r_y &= \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \left(\frac{K_I}{F_y} \right)^2 \; no\, EPD \end{aligned} \tag{2.20}$$

onde r_y é a dimensão da zona plástica e F_y é a tensão de escoamento do material.

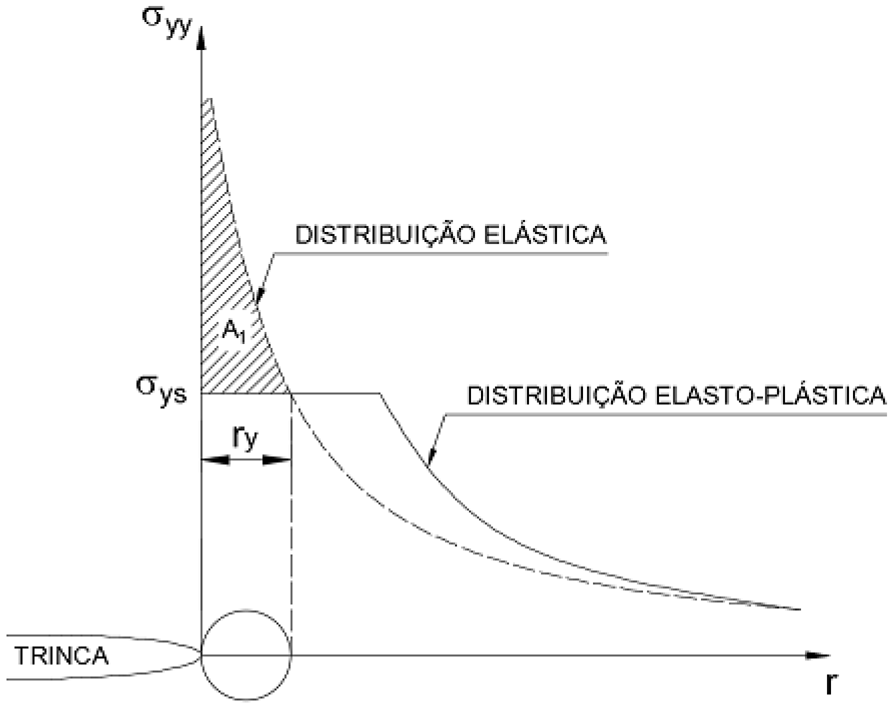


Figura 2.18: Distribuição de tensões à frente da ponta da trinca (adaptada de ANDERSON, 2005, p. 62)

No modelo proposto, as tensões elásticas não suportadas pelo material, representadas pela área hachurada A_1 na Figura 2.18, devem ser redistribuídas para garantir o equilíbrio. Segundo IRWIN (1961, apud ANDERSON, 2005, p. 62), a zona plástica cresce para acomodar essa energia, causando um aumento localizado nas tensões, e implicando em um aumento de K. Para considerar o aumento, Irwin definiu o comprimento efetivo da trinca, a_{eff} como:

$$a_{\text{eff}} = a + r_y \tag{2.21}$$

A Figura 2.19 esquematiza o comprimento efetivo de uma trinca. O fator de intensidade de tensões corrigido é obtido pelo uso do comprimento efetivo na equação

2.54. Essa é uma operação iterativa, visto que a_{eff} e K_{Ieff} são dependentes entre si.

$$K_{\text{Ieff}} = (f(a/W)\,\sigma\sqrt{\pi a_{\text{eff}}} \tag{2.22}$$

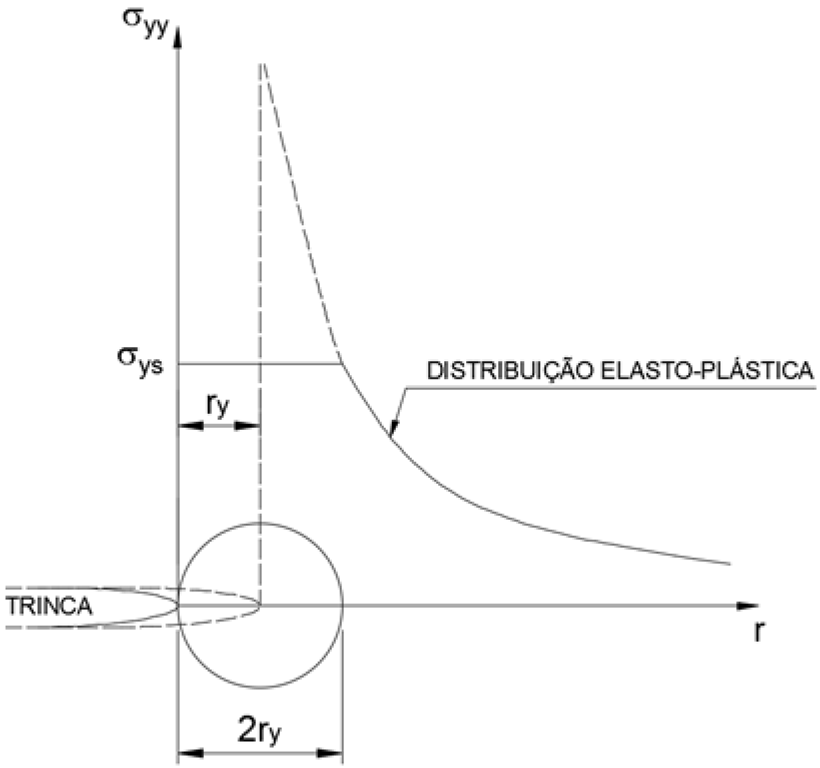


Figura 2.19: Comprimento efetivo de uma trinca (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 64)

2.3.4 A curva $da/dn \times \Delta K$

PARIS *et al.* (1961) foram os primeiros pesquisadores a relacionar a taxa de propagação de uma trinca ao fator de intensidade de tensões. A correlação entre as duas grandezas foi de grande importância, visto que a partir desse conceito pode-se prever o comportamento de um componente trincado a partir de dados obtidos de corpos de prova padrão. Segundo JANSSEN *et al.* (2002, p. 211), tratando-se do mesmo material, um corpo de prova padrão submetido a certo ΔK terá a mesma taxa de propagação de uma estrutura complexa com geometria arbitrária, submetida ao mesmo ΔK. Esse conceito é chamado de *similitude*. A propagação de trincas por fadiga é definida pelo incremento infinitesimal de trinca da durante um número infinitesimal de ciclos dn. A Figura 2.20 esquematiza a curva $da/dn \times \Delta K$, que representa o comportamento típico de crescimento de trincas por fadiga em metais.

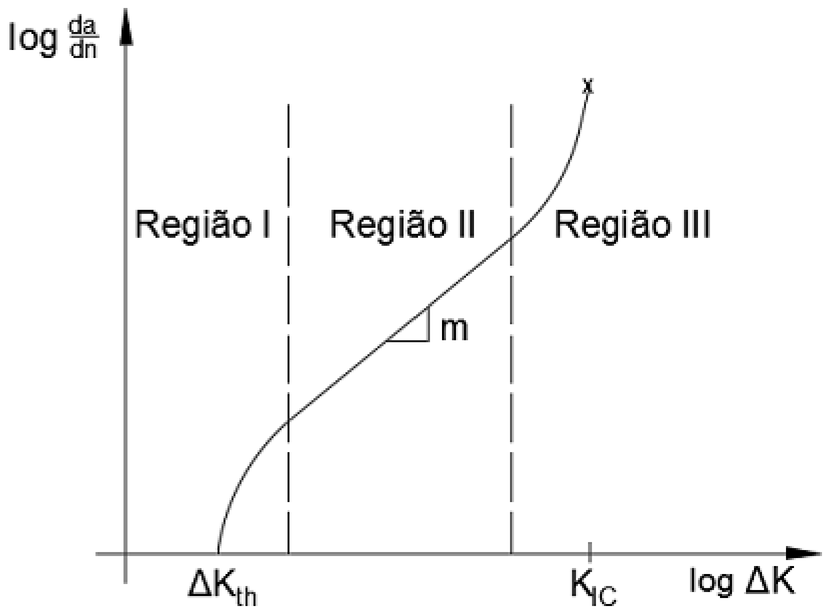


Figura 2.20: Representação da curva $da/dn \times \Delta K$ (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 211)

A curva apresenta três regiões distintas. Na Região I há um limite inferior para ΔK, chamado de ΔK_{th}, abaixo do qual a taxa de propagação de trincas é muito baixa ou nula. Na Região II, a relação entre da/dn e ΔK é exponencial, levando a uma relação linear entre $\log da/dn$ e $\log \Delta K$. A descoberta dessa relação é atribuída a PARIS e ERDOGAN (1960). Finalmente, na Região III, a taxa de crescimento cresce rapidamente e ocorre a fratura quando o máximo fator de intensidade de tensões, K_{max}, se iguala à K_{IC}. A Figura 2.21 esquematiza os resultados experimentais obtidos por PARIS *et al.* (1972) para um aço de vaso de pressão submetido a diversos ΔK.

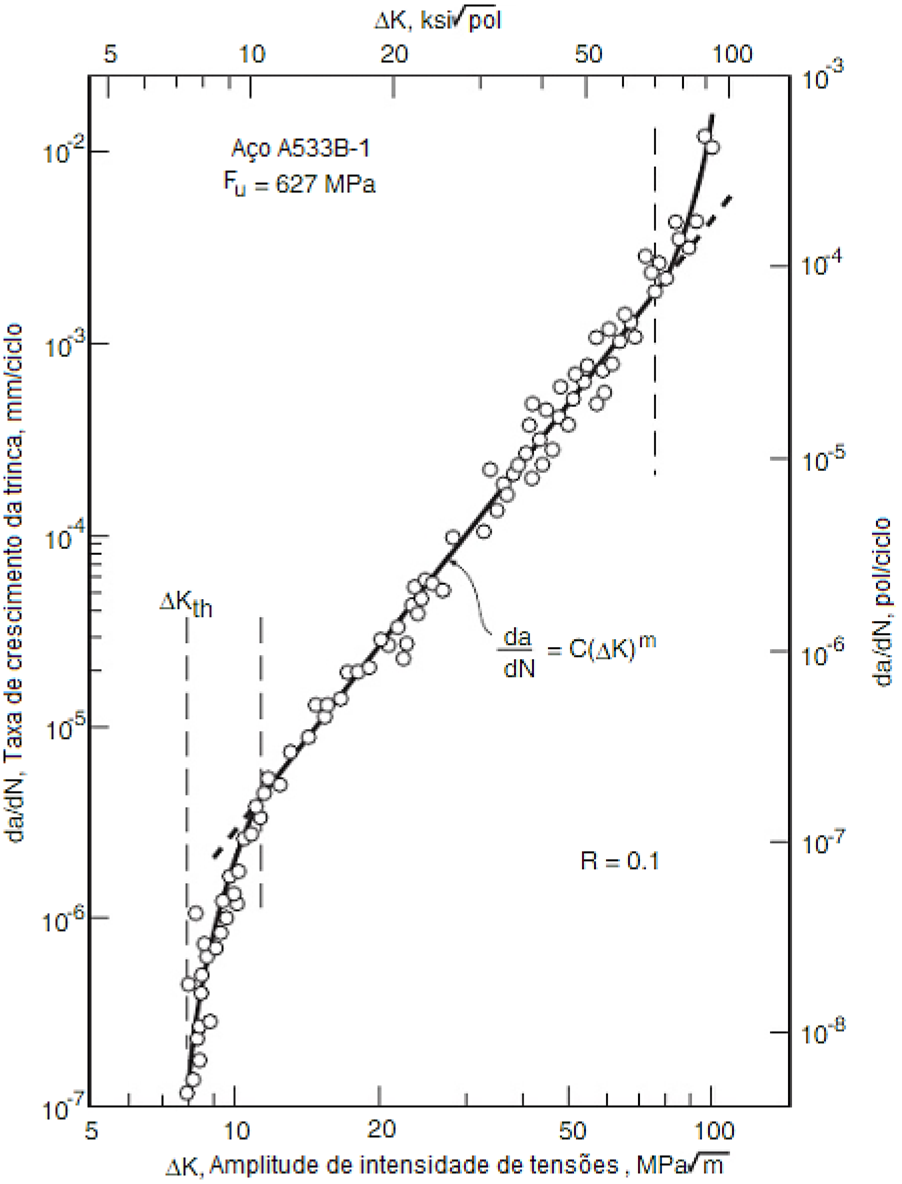


Figura 2.21: Taxas de crescimento de trincas de um aço submetido a diversos ΔK(PARIS *et al.*, 1972, apud DOWLING, 2013, p. 565)

Diversas equações para descrever matematicamente a curva foram propostas, usualmente formulações semi-empíricas ajustadas para um determinado conjunto de dados experimentais. A equação mais conhecida é a chamada Lei de Paris, que representa a região II da curva.

$$\frac{da}{dn} = C_p\,(\Delta K)^{m_p} \tag{2.23}$$

onde C_p e m_p[5] são constantes do material, determinadas experimentalmente. BARSOM e ROLFE (1999) sugeriram os valores da Tabela 2.1 para as constantes da Lei de Paris.

Tabela 2.1: Valores de $\mathrm{C_p}$ e $\mathrm{m_p}$ para alguns tipos de aço (ΔK em $\sqrt{MPa \times m}$) (BARSOM e ROLFE, 1999)

Tipo de aço	$\mathrm{C_p}$ (mm/ciclo)	$\mathrm{m_p}$
Ferrítico-perlítico	$6{,}89\times10^{-9}$	3,00
Martensítico	$1{,}36\times10^{-7}$	2,25
Austenítico	$5{,}61\times10^{-9}$	3,25

Conhecida a lei de propagação, o número de ciclos até a fratura é expresso como função da trinca inicial, a_0, e a máxima trinca suportada, a_{cr}. A curva de propagação $a \times N$ comumente apresenta a forma apresentada na Figura 2.22.

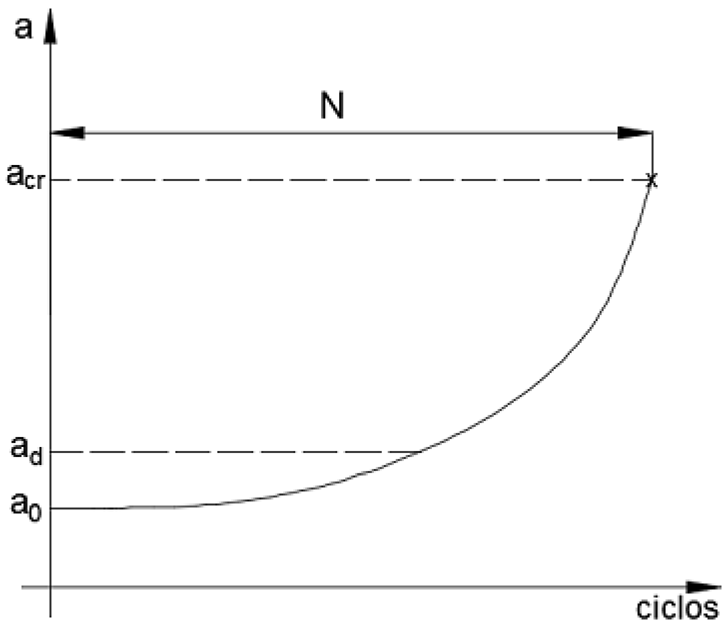


Figura 2.22: Representação esquemática da curva de propagação (adaptada de JANSSEN *et al.*, 2002, p. 209)

A trinca inicial é comumente adotada como a mínima trinca detectável por ensaios não destrutivos, a_d. A máxima trinca suportada pode ser encontrada

[5]Na literatura, C_p e m_p são definidos como C e m, respectivamente. Definiu-se como C_p e m_p neste trabalho para diferenciar das demais grandezas representadas por C e m.

igualando-se $K_{\max}$ a K_{IC}.

$$N = \int_{a_d}^{a_{\mathrm{cr}}} \frac{da}{f\,(\Delta K)} \tag{2.24}$$

A integral da equação 2.24 pode ser calculada através de um método numérico interativo aproximado, que permite a determinação de N para qualquer lei de propagação. Os passos a serem adotados são (JANSSEN *et al.*, 2002, p. 225):

- Escolha de um incremento de trinca $\Delta\, a = a_{\mathrm{i+1}} - a_{\mathrm{i}}$, de dimensão tal que não cause perda de precisão por ser muito grande, nem onere o trabalho computacional por ser muito pequeno;
- Cálculo de ΔK_i , para a média do comprimento da trinca, $(a_{\mathrm{i+1}} - a_{\mathrm{i}})\,/2$;
- Determinação de $(da/dn)_i$ para o valor calculado de ΔK_i;
- Cálculo de $\Delta\, n_i$ pela equação $\Delta\, a_i/\,(da/dn)_i$;
- Repetir até que $a_i + 1 = a_{\mathrm{cr}}$ e determinar N pela equação $\sum \Delta\, n_i$.

2.4 Utilização das teorias de Paris e Wöhler: o estado da arte

A busca por modelos que utilizem ambas as teorias é recente e alguns avanços já foram obtidos. Os parágrafos seguintes visam apresentar o estado da arte nessas metodologias. Nesta seção, as seguintes notações serão utilizadas:

- N_t: número total de ciclos até a falha por fadiga;
- N_i número de ciclos associado à iniciação de uma trinca;
- N_p número de ciclos associado à propagação de uma trinca;
- $N_{Wöhler}$ número de ciclos obtido pela teoria de Wöhler;
- N_{Paris} número de ciclos obtido pela teoria de Paris.

2.4.1 Pugno, Cornetti e Carpinteri (2007)

A metodologia apresentada por PUGNO *et al.* (2007) considera uma generalização das leis de Paris e Wöhler, utilizando um parâmetro original da mecânica da fratura quantizada, chamado pelos autores de *quantum de fratura*, representado por $\Delta\, a$. Tal parâmetro representa um comprimento fictício a ser adicionado à dimensão da trinca. As leis de Paris e de Wöhler podem ser generalizadas para considerar a influência do quantum de fratura.

Segundo PUGNO e RUOFF (2004), a variação de intensidade de tensões aplicando o incremento do *quantum* de fratura é descrito como:

$$\Delta K^{*}\left(a,\Delta a\right)=\sqrt{\left\langle \Delta K^{2}\left(a\right)\right\rangle_{a+\Delta a}^{a}} \tag{2.25}$$

onde K é o fator de intensidade de tensões da teoria de Irwin e Δa é o quantum de fratura. Considerando ΔK^{*}, a lei de Paris é generalizada segundo a equação

$$\frac{da}{dN_{Paris}}=C_{p}\left[\Delta K^{*}\left(a,\Delta\, a\right)\right]^{m_{p}} \tag{2.26}$$

sendo C_p e m_p os parâmetros da Lei de Paris tradicional. O número de ciclos até a falha associado à lei de Paris generalizada pode ser descrito como

$$N_{Paris}^{*}=\frac{1}{C_{p}}\int_{a}^{a_{c}}\frac{da}{\left[\Delta K^{*}\left(a,\Delta\, a\right)\right]^{m_{p}}}. \tag{2.27}$$

Generalizar a lei de Wöhler não é um processo diretamente dependente do quantum de fratura, visto que essa lei não considera a presença de trincas no componente. Utilizando a teoria de NOVOZHILOV (1969), uma generalização pode ser feita utilizando-se o valor médio da variação de tensão à frente de um concentrador de tensão, ao longo do comprimento do quantum de fratura, descrito como:

$$\Delta\sigma^{*}\left(a,\Delta a\right)=\left\langle \Delta\sigma_{yy}\left(x\right)\right\rangle_{0}^{\Delta a} \tag{2.28}$$

onde $\Delta\sigma_{yy}$ é a variação de tensão à frente do concentrador. Aplicando-se $\Delta\sigma^{*}\left(a,\Delta a\right)$ à formulação de Wöhler, o número de ciclos até a falha é encontrado segundo a equação

$$N_{W\ddot{o}hler}^{*}=\frac{C_{w}}{\left[\Delta\sigma^{*}\left(a,\Delta\, a\right)\right]^{m_{w}}} \tag{2.29}$$

sendo C_w e m_w parâmetros do material.

Pugno, Cornetti e Carpinteri propõem a unificação das duas teorias assumindo que o quantum de fratura é definido de tal forma que:

$$\Delta a\left(a\right):\ N_{Paris}^{*}=N_{W\ddot{o}hler}^{*}. \tag{2.30}$$

Aplicando as definições de $\Delta K^{*}\left(a,\Delta a\right)$ e $\Delta\sigma^{*}\left(a,\Delta a\right)$ (equações 2.26 e 2.28, respectivamente), podemos obter a equação

$$C_{p}C_{w}\frac{d}{da}\left\{\left[\Delta\sigma^{*}\left(a,\Delta\, a(a)\right)\right]^{-m_{p}}\right\}+\left[\Delta K^{*}\left(a,\Delta\, a(a)\right)\right]^{-m_{w}}=0. \tag{2.31}$$

Dessa forma, o valor de $\Delta\, a\left(a\right)$ pode ser obtido por integração e o número de ciclos é obtido segundo a equação 2.30. Um exemplo de aplicação ao caso de uma chapa infinita com trinca centralizada de comprimento $2a$ é apresentado na publicação.

De acordo com os próprios autores, esta metodologia não é de aplicação analítica trivial, demandando uma análise do campo de tensões na região da ponta da trinca, além da solução da equação diferencial, numericamente ou analiticamente. Em estruturais reais, a metodologia é de difícil aplicação, pois resulta em equações diferenciais de alta complexidade. Ademais, a publicação não apresenta dados experimentais para corroborar a hipótese.

2.4.2 Chen, Wang e Soares (2011)

CHEN *et al.* (2011) propuseram um modelo onde são utilizadas a teoria de Wöhler e a regra de Miner para calibrar a formulação de Paris. A hipótese apresentada é a de que com ajuste do fator de concentração de tensões embutido na formulação de Wöhler, a vida à fadiga obtida pela formulação de Paris (N_{Paris}) se equivale à vida à fadiga obtida pela metodologia de Wöhler ($N_{\text{Wöhler}}$).

O fator de concentração de tensões, K_t, utilizando no cálculo de $N_{\text{Wöhler}}$ é calibrado de forma iterativa, até que $N_{\text{Wöhler}}$=N_{Paris}. A diferença entre os valores, E_R é expressa como:

$$E_R = \frac{N_{\text{Wöhler}} - N_{Paris}}{N_{\text{Wöhler}}}. \tag{2.32}$$

Os autores consideram o modelo calibrado quando $E_R < 1 \times 10^{-3}$. Um estudo de caso é apresentado, onde estuda-se o surgimento de uma trinca superficial em uma junta offshore. Em conjunto com a metodologia apresentada, são utilizados conceitos de confiabilidade estrutural, a fim de detectar a trinca no menor comprimento possível.

Um dos pontos positivos da publicação é a utilização de curvas S-N normativas, publicadas pela ABS (2010a), o que torna o modelo mais facilmente aplicável a estruturas complexas. Assim como na publicação de PUGNO *et al.* (2007), também não são apresentados dados experimentais.

2.4.3 Ávila, Palma e de Paula (2017)

ÁVILA *et al.* (2017) apresentaram uma publicação onde realizam o estudo de vida à fadiga de uma estrutura de suporte de um guindaste real e em operação, utilizando a teoria de Wöhler como uma análise prévia para selecionar juntas para inspeções em campo, sendo realizada a verificação da vida à fadiga segundo Paris nas juntas onde fossem encontradas trincas.

A primeira avaliação foi feita para determinação dos pontos mais críticos quanto a falhas por fadiga. Segundo os autores, essa avaliação foi feita com base na literatura, apesar de esta literatura não ser apontada na publicação. Foram considerados ao total cinco pontos, apresentados na Figura 2.23, os quais foram classificados de acordo com os critérios da AASHTO (1996) para a análise por curvas S-N.

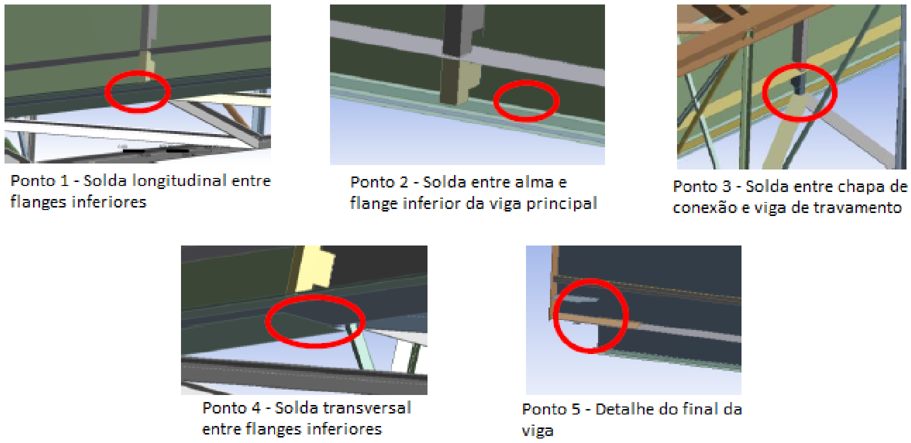


Figura 2.23: Pontos utilizados na análise (adaptada de ÁVILA *et al.*, 2017)

Uma análise inicial foi feita com o auxílio de um software para modelagem em elementos finitos. Foram adotadas três condições de carregamento: translação com carga de 340t, 300t e 100t. A estrutura foi modelada aplicando-se as cargas de projeto, e as tensões do modelo utilizadas para cálculo de dano acumulado segundo a regra de Miner. De todos os pontos analisados, o ponto 4 teve um dano acumulado maior do que 1,00, indicando que este ponto já deveria apresentar algum tipo de falha.

Para avaliar as tensões reais atuantes na estrutura de suporte, foi utilizada uma instrumentação em campo, sendo instalados strain gages na estrutura. O monitoramento se deu por 24h de operação do guindaste. Depois, as tensões obtidas pela instrumentação foram comparadas com os valores do modelo. Observou-se que as tensões reais eram 20% a 30% menores que as tensões de projeto. Essa diferença era esperada, visto que projetos de estruturas sempre contam com fatores de segurança para majorar as tensões atuantes.

Os resultados de dano acumulado foram calibrados para as tensões reais obtidas pela instrumentação. A partir desses novos resultados, verificou-se que as juntas 1, 2 e 5 possuíam vida infinita à fadiga, a junta 3 deveria apresentar trincas em estágio de propagação, e em tese, a junta 4 já deveria ter sofrido alguma falha. A partir deste resultado, foi feita uma inspeção visual e com líquido penetrante nas juntas 3 e 4. Foram encontradas trincas com comprimentos variando de 5 a 55mm. A Figura 2.24 apresenta algumas imagens da inspeção realizada.

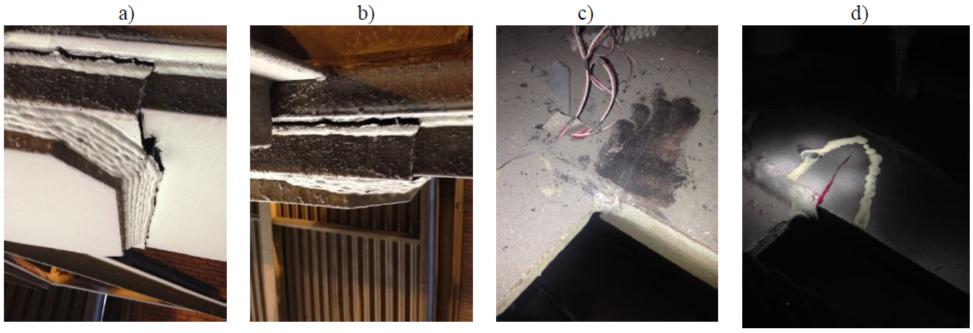


Figura 2.24: a)Trinca iniciada em solda entre chapas b)Trinca propagada na direção da solda longitudinal c)Trinca identificada visualmente d)Líquido penetrante na trinca identificada (adaptada de ÁVILA *et al.*, 2017)

As trincas encontradas nos flanges inferiores foram consideradas como mais graves, pois poderiam causar colapso do guindaste por fratura. Desta forma, foi realizada uma modelagem destes flanges segundo a metodologia de Paris, utilizando o software Franc2D (Cornell Fracture Group, 2016). Uma chapa com tensões de tração e uma trinca inicial de 10mm foi utilizada na análise. Não foi possível identificar na publicação o porquê deste comprimento inicial.

A trinca foi propagada em 20 iterações, e ao final de cada iteração a malha foi novamente refinada e os valores de K_I foram calculados. A vida à fadiga foi calculada como o número de ciclos necessário para a trinca se propagar de 10mm até a falha. Observou-se que esta falha ocorreria em aproximadamente 20 anos. O procedimento apresentado, de utilizar a análise por S-N como uma análise prévia para definir o foco de uma inspeção e análise das trincas existentes é bastante atrativo e de fácil aplicação em estruturas reais, porém a publicação não propõe nenhuma convergência entre as metodologias utilizadas.

2.4.4 Hashemi *et al.* (2017)

HASHEMI *et al.* (2017) iniciam a publicação afirmando que as teorias de Paris e Wöhler são válidas para aplicação em análises de vida à fadiga de estruturas, e propondo um estudo de confiabilidade estrutural utilizando ambas as teorias, a fim de determinar se são consistentes entre si. O objeto de estudo é uma junta soldada longitudinal, sujeita a um espectro de tensão que segue a distribuição de probabilidade de Rayleigh, como proposto por GURNEY (2006).

São utilizadas curvas S-N das normas EN 1993-1-9 (CNE, 2005) e BS 7608 (BSI, 2014). Segundo os autores, o problema possui variáveis com incertezas, devido à natureza estocástica destas, à incertezas de modelagem, ou ainda, a erros humanos. Portanto, um estudo de confiabilidade foi realizado.

Na análise por curvas S-N, são adotadas como variáveis aleatórias os parâmetros das curvas S-N e o dano acumulado crítico (no momento da falha). A função de falha adotada é:

$$g_W(\boldsymbol{X}, t) = D_{cr} - D_n \tag{2.33}$$

onde $\boldsymbol{X}$ é o vetor com as variáveis aleatórias, t é o tempo, D_{cr} é o dano acumulado no momento da falha e D_n é o dano associado a n ciclos. Na análise segundo a teoria de Paris, foram adotados parâmetros apresentados pelo HSE (1998) e JCSS (2001). A hipótese estudada é a de propagação de uma trinca semi-elíptica. As variáveis aleatórias utilizadas na análise são os parâmetros das curvas de propagação, o limiar de propagação ΔK_{th}, o comprimento inicial de trinca b_0[6] e a relação b_0/c_0, típica de trincas semi-elípticas. A função de falha adotada é:

$$g_P(\boldsymbol{X}, t) = min\,(b_{cr} - b_n, c_{cr} - c_n) \tag{2.34}$$

sendo b_n e c_n os comprimentos da trinca associados a n ciclos na direção transversal e longitudinal, respectivamente, e b_{cr} e c_{cr} os comprimentos críticos da trinca nas mesmas direções, assumidos como 90% da espessura e 45% da largura da chapa, respectivamente. As simulações foram realizadas com um total de $3{\times}10^6$ amostras. Para reduzir a complexidade da análise computacional, os autores realizaram uma análise utilizando a metodologia de frações parciais apresentada no EN 1993-1-9.

Nos resultados, são exibidos graficamente a probabilidade de falha para diversos números de ciclos, tanto para a análise por cuvas S-N para a análise por curvas de propagação. Conclui-se que os resultados para ambas as metodologias são congruentes para fadiga de alto ciclo. Porém, com o aumento do número de ciclos, na região de fadiga de altíssimo ciclo[7], os resultados da análise segundo Wöhler apresentam probabilidades de falha significativamente superiores às da análise pela teoria de Paris. Segundo os pesquisadores, essa diferença se deve ao fato de as curvas S-N utilizadas não serem compatíveis com o conceito de limiar de propagação, comumente adotado no contexto de propagação de trincas.

2.4.5 Wu e Chen (2017)

O artigo de WU e CHEN (2017) tem como objeto de estudo uma turbina eólica *offshore*, que segundo os autores está sujeita a carregamentos cíclicos e dinâmicos durante sua vida útil. A análise da vida útil da estrutura é feita segundo as teorias de Wöhler e Paris, com o objetivo de comparar os resultados obtidos para ambas as metodologias.

[6]Na literatura, trincas semi-elípticas têm suas dimensões transversal e longitudinal descritas por a e c, respectivamente. Definiu-se a dimensão transversal como b neste trabalho para diferenciar das demais grandezas representadas por a.

[7]Número de ciclos superior a 10^7 (PYTTEL *et al.*, 2011)

Foram adotados os parâmetros de curvas S-N propostas pela ABS (2010b) para a análise pela teoria de Wöhler. A curva adotada é bi-linear, ou seja, apresenta dois conjuntos de parâmetros, conforme apresentado na 2.25.

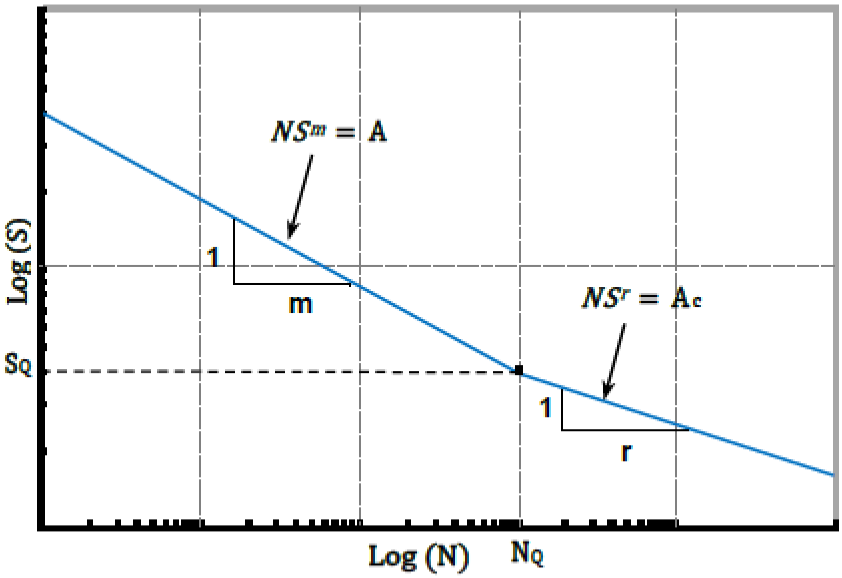


Figura 2.25: Curva S-N bi-linear adotada por WU e CHEN (2017)

Para a análise segundo a teoria de Paris, um comprimento inicial de trinca deve ser adotado. Com base em um relatório publicado por HUDAK *et al.* (1990), adotou-se trincas de superfície, esquematizadas na Figura 2.26, sendo a_0 e c_0 iguais a 0,39mm. Considerou-se que a trinca se propagará até que a atinja 75% da espessura da chapa. A norma BS7910 (BSI, 2013) foi utilizada como referência para os parâmetros da curva de propagação.

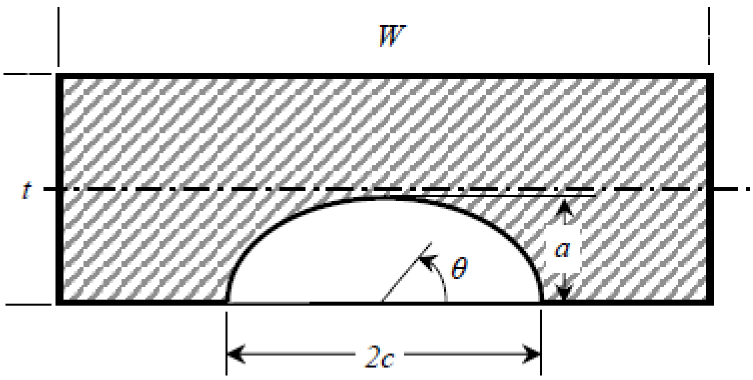


Figura 2.26: Geometria de uma trinca de superfície (WU e CHEN, 2017)

Foram analisados doze pontos ao redor da seção transversal da base da torre, segundo a Figura 2.27. Os resultados para cada um dos pontos constam na Figura 2.28.

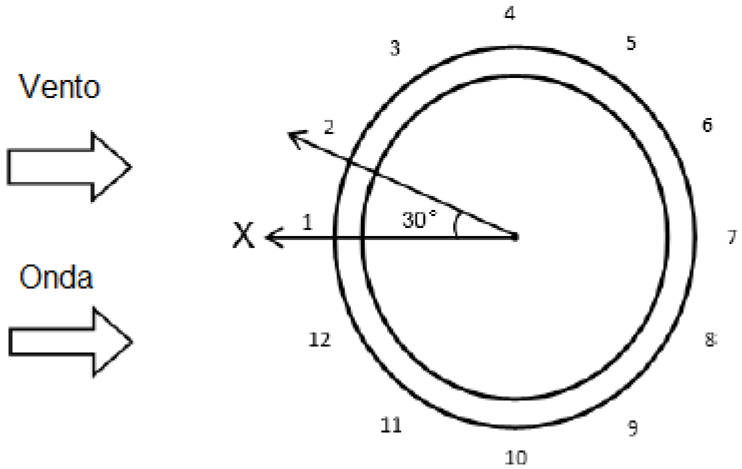


Figura 2.27: Pontos analisados na seção transversal da base da torre (adaptada de WU e CHEN, 2017)

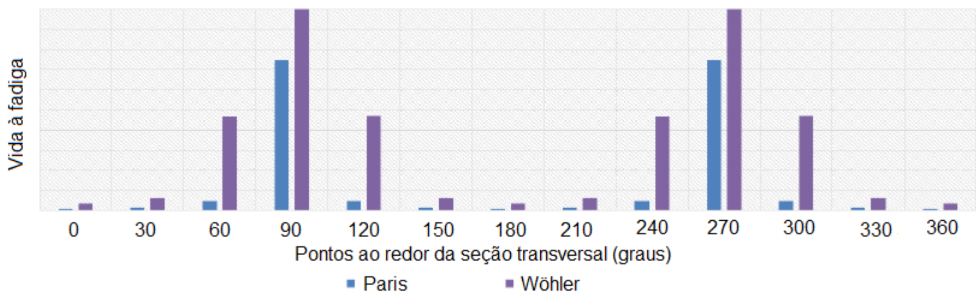


Figura 2.28: Resultados obtidos para os pontos analisados (adaptada de WU e CHEN, 2017)

Como conclusão, os autores apontam que a vida à fadiga estimada pela teoria de Paris é mais conservadora que a estimada pela teoria de Wöhler. Esse comportamento é o esperado, visto que Paris trata do estágio II (propagação) e Wöhler trata dos estágios I e II (iniciação e propagação). Os pesquisadores também realizaram análises com diferentes parâmetros para a curva de propagação, e concluíram que a vida útil obtida pela teoria de Paris é extremamente sensível a esses parâmetros.

2.5 Método dos Elementos Finitos (MEF)

2.5.1 Formulação

Da teoria da elasticidade, temos que a relação tensão-deformação para um material isotrópico e linear elástico é da forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \tag{2.35}$$

onde $\boldsymbol{C}$ é a matriz constitutiva, expressa como:

$$\begin{aligned} C &= \frac{E}{1-v^2}\begin{pmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-v}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para EPT} \\ C &= \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\begin{pmatrix} 1-v & v & 0 \\ v & 1-v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2v}{2} \end{pmatrix} \quad \text{para EPD} \end{aligned} \tag{2.36}$$

sendo E o módulo de elasticidade do material e v o coeficiente de Poisson. Considerando a hipótese de pequenas deformações, as deformações para o elemento da Figura 2.29 são expressas como:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{\epsilon} = \partial(x) \cdot \boldsymbol{u} \tag{2.37}$$

onde u é vetor dos deslocamentos nodais.

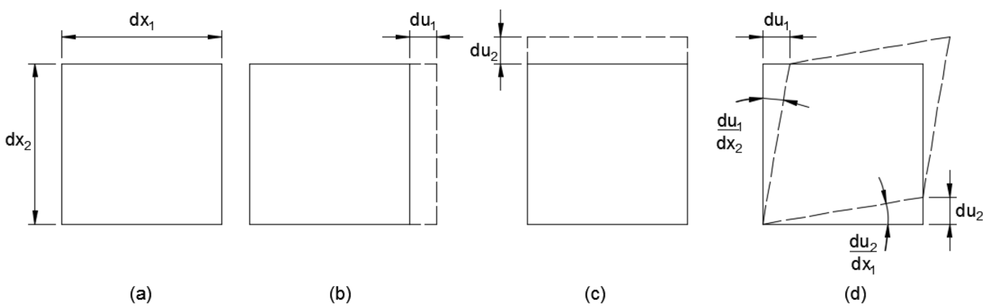


Figura 2.29: Elemento infinitesimal indeformado (a), sujeito a deformação na direção x_1 (b), na direção x_2 (c) e cisalhamento (d) (adaptada de COOK, 1994, p.42)

Os deslocamentos no domínio do elemento são interpolados a partir dos deslocamentos nodais por meio de funções de interpolação. Uma função de interpolação é do tipo:

$$F_i(x, y) = \begin{cases} 1, & se\,(x_1, x_2) = (x_1^i, x_2^i)\,, \\ 0, & se\,(x_1, x_2) \neq (x_1^i, x_2^i) \end{cases} \tag{2.38}$$

As coordenadas de um ponto no domínio do elemento podem ser encontradas pela equação:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & \cdots & F_i & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & F_2 & \cdots & 0 & F_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ \cdots \\ x_1^i \\ x_2^i. \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

onde $x_{1,2}^i$ são as coordenadas do i-ésimo nó e F_i são as funções de interpolação, sendo i o número de nós do elemento. O campo de deslocamentos no elemento pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & \cdots & F_i & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & F_2 & \cdots & 0 & F_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \cdots \\ u_1^i \\ u_2^i \end{pmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d} \tag{2.40}$$

sendo $\boldsymbol{d}$ o vetor com os deslocamentos de todos os nós do elemento. Igualando as equações 2.37 e 2.40, temos que o campo de deformações é encontrado pelo seguinte produto:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial\,(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d}. \tag{2.41}$$

O produto interno $\partial \cdot \boldsymbol{N}$ é chamado de matriz deformação-deslocamento, a matriz B, que relaciona o campo de deformação do elemento com os seus deslocamentos nodais.

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 & 0 & F_2 & 0 & \cdots & F_i & 0 \\ 0 & F_1 & 0 & F_2 & \cdots & 0 & F_i \end{pmatrix} \text{ou } \boldsymbol{B} = \partial\left(\boldsymbol{x}\right) \cdot \boldsymbol{N}. \tag{2.42}$$

A matriz de rigidez do elemento é expressa como:

$$\boldsymbol{k} = \int \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} dV. \tag{2.43}$$

A contribuição de cada elemento é adicionada à matriz de rigidez global. Finalmente, a solução da equação:

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{2.44}$$

sendo $\boldsymbol{K}$ a matriz de rigidez global e $\boldsymbol{F}$ o vetor com as forças externas, fornece os deslocamentos nodais de todo o sistema, $\boldsymbol{U}$.

2.5.2 Elementos isoparamétricos

Representar uma malha numa região com geometria não trivial exige que os elementos tenham maior flexibilidade na sua forma. Elementos isoparamétricos têm a propriedade de correlacionar as coordenadas globais de um elemento com coordenadas locais em um elemento de geometria simplificada, as chamadas coordenadas naturais (ξ_1, ξ_2). São apresentadas na Figura 2.30 as coordenadas globais e naturais de um elemento Q8.

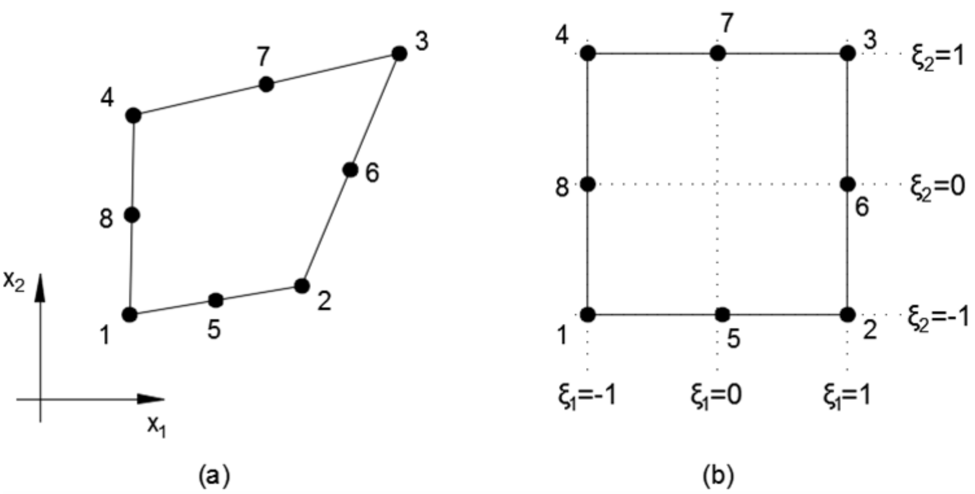


Figura 2.30: Elemento isoparamétrico e suas coordenadas globais (a) e naturais (b)

Nas coordenadas naturais, o elemento tem lados definidos por $\xi_1 \pm 1, \xi_2 \pm 1$, independente da forma do elemento nas coordenadas globais. Para um elemento quadrilateral de segunda ordem, como os da Figura 2.30, as funções de forma são:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{(1+\xi_1)(1+\xi_2)}{4} - \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)}{4} \\
F_2 &= \frac{(1-\xi_1)(1+\xi_2)}{4} \\
F_3 &= \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{4} \\
F_4 &= \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)}{4} - \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2)}{4} \\
F_5 &= \frac{(1-\xi_1^2)(1+\xi_2)}{2} \\
F_6 &= \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2^2)}{2} \\
F_7 &= \frac{(1-\xi_1^2)(1-\xi_2)}{2} \\
F_8 &= \frac{(1+\xi_1)(1-\xi_2^2)}{2}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Conhecidas as coordenadas locais e as funções de forma, as coordenadas de qualquer ponto no domínio do elemento podem ser calculadas pela equação 2.39. O campo de deslocamentos é interpolado a partir dos deslocamentos nodais pela equação 2.40. Já as deformações no elemento, descritas pela equação 2.37, não podem ser escritas de forma direta porque os deslocamentos são função de $\boldsymbol{\xi}$ e não de $\boldsymbol{x}$. Para formar a matriz $\boldsymbol{B}$, é necessário derivar as funções F_i em relação a $\boldsymbol{x}$.

Utilizando a regra da cadeia, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_i}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

onde a matriz com as diferenciais de $\boldsymbol{x}$ em relação a $\boldsymbol{\xi}$ é chamada de matriz Jacobiano, ou matriz $\boldsymbol{J}$. Os termos da matriz $\boldsymbol{J}$ são encontrados derivando a equação 2.40.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_i} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi_i} & 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial \xi_i} & 0 & \cdots & \dfrac{\partial F_i}{\partial \xi_i} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial F_1}{\partial \xi_i} & 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial \xi_i} & \cdots & 0 & \dfrac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ \cdots \\ u_1^i \\ u_2^i \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

A equação 2.41 passa a ser escrita então como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{J}^{-1} \partial \left(\boldsymbol{\xi} \right) \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{d}. \tag{2.48}$$

A matriz de rigidez do elemento é escrita como:

$$\boldsymbol{k} = \int \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} dV = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B} |\boldsymbol{J}| \, t \, d\xi_1 \, d\xi_2 \tag{2.49}$$

sendo t é a espessura do elemento. Essa integral pode ser resolvida analiticamente ou numericamente. É usual que a integral seja aproximada através da quadratura de Gauss-Legendre, que avalia a integral como somatório de um número finito de pontos.

2.5.3 Quadratura de Gauss-Legendre

A quadratura de Gauss-Legendre consiste em determinar fórmulas de integração que sejam exatas, através de um somatório utilizando n pontos, chamados de pontos de Gauss, para polinômios de grau $\leq 2n - 1$ (GUIZZARDI, 2010). Considerando dois pontos, deve-se determinar uma equação do tipo:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) \tag{2.50}$$

de forma que seja exata para polinômios de grau $\leq$ 3, ou seja, é exata para os polinômios $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$ e $g_3(x) = x^3$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 = W_1 + W_2 \\
\int_{-1}^{1} x\, dx = 0 = W_1 x_1 + W_2 x_2 \\
\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} = W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 \\
\int_{-1}^{1} x^3\, dx = \frac{2}{3} = W_1 x_1^3 + W_2 x_2^3
\end{aligned} \tag{2.51}$$

A equação 2.51 resulta em um sistema não linear de ordem 4, cuja solução é apresentada na equação 2.52.

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, W_1 = W_2 = 1. \tag{2.52}$$

O processo é similar para diferentes números de pontos de Gauss. A Tabela 2.2 apresenta a posição dos pontos de Gauss e seus respectivos pesos, para valores de n entre 2 e 5.

Tabela 2.2: Posição dos pontos de Gauss e seus pesos, para $2 \leq n \leq 5$ (ROSA, 2010)

n	i	x_i	W_i
2	0	-0,5773502691	1,0000000000
	1	0,5773502691	1,0000000000
3	0	-0,7745966692	0,5555555555
	1	0,0000000000	0,8888888888
	2	0,7745966692	0,5555555555
4	0	-0,8611363115	0,3478548451
	1	-0,3399810435	0,6521451548
	2	0,3399810435	0,6521451548
	3	0,8611363115	0,3478548451
5	0	-0,9061798459	0,2369268850
	1	-0,5384693101	0,4786286704
	2	0,0000000000	0,5688888888
	3	0,5384693101	0,4786286704
	4	0,9061798459	0,2369268850

A integral da equação 2.49, em duas dimensões, utiliza n^2 pontos de Gauss. A solução numérica para essa integral é expressa na equação 2.53. Segundo COOK (1994, p.84), a solução numérica de $\boldsymbol{k}$ é aproximada, independente do número de pontos utilizados.

$$\boldsymbol{k} = \int \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} dV = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B} |\boldsymbol{J}| \, t \, d\xi_1 \, d\xi_2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} W_i W_j \boldsymbol{B}\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right) |\boldsymbol{J}\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)| \, t \quad (2.53)$$

2.5.4 Mecânica da fratura no MEF

A determinação da taxa de liberação de energia ou do fator de intensidade de tensões de forma analítica é limitada a determinadas geometrias e condições de carregamento, e sua aplicação a problemas reais é reduzida. Para os demais casos, de geometrias complexas, é necessária a utilização de métodos numéricos para encontrar as grandezas desejadas.

Os primeiros estudos envolvendo problemas de Mecânica da Fratura no MEF foram realizados por SWEDLOW *et al.* (1965) e CHAN *et al.* (1970), no final da década de 60. Os modelos desenvolvidos nessa época não consideravam a singularidade da distribuição das tensões à frente da trinca quando $r \rightarrow 0$, apresentada na Figura 2.18 A Figura 2.31 apresenta a distribuição de K_I para diferentes valores de r. Os elementos próximos à ponta não representam de forma correta a singularidade e o valor de K_I cai rapidamente em relação ao valor teórico. Dessa forma, não há acurácia na região da ponta da trinca e os erros intrínsecos podem condenar toda a solução.

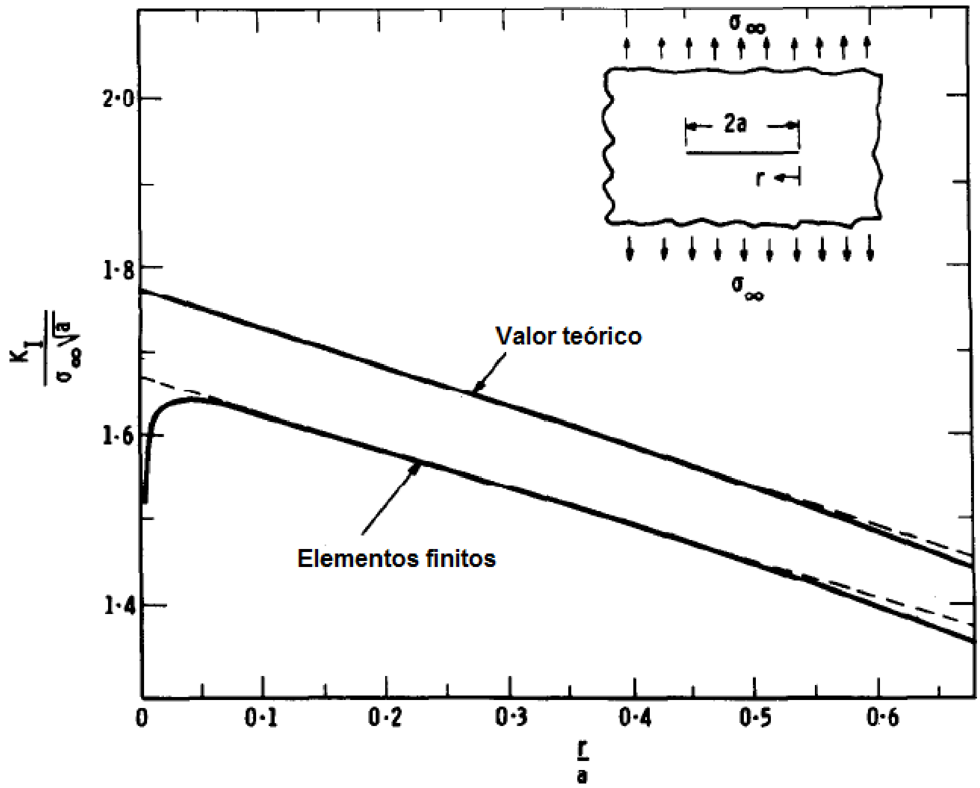


Figura 2.31: Resultado encontrado por WESTERGAARD (1939, apud CHAN *et al.*, 1970, p. 11)

BARSOUM (1975) e HENSHELL e SHAW (1975) mostraram que a simulação da singularidade é obtida com o uso de um elemento especial na ponta da trinca, o *quarter point*, que é um elemento de segunda ordem cujos nós intermediários não se encontram no centro da aresta, mas deslocados conforme a Figura 2.32. Esses elementos são arranjados de forma circunferencial, formando as primeiras fileiras da malha na região, chamada de roseta, que é ilustrada na Figura 2.33.

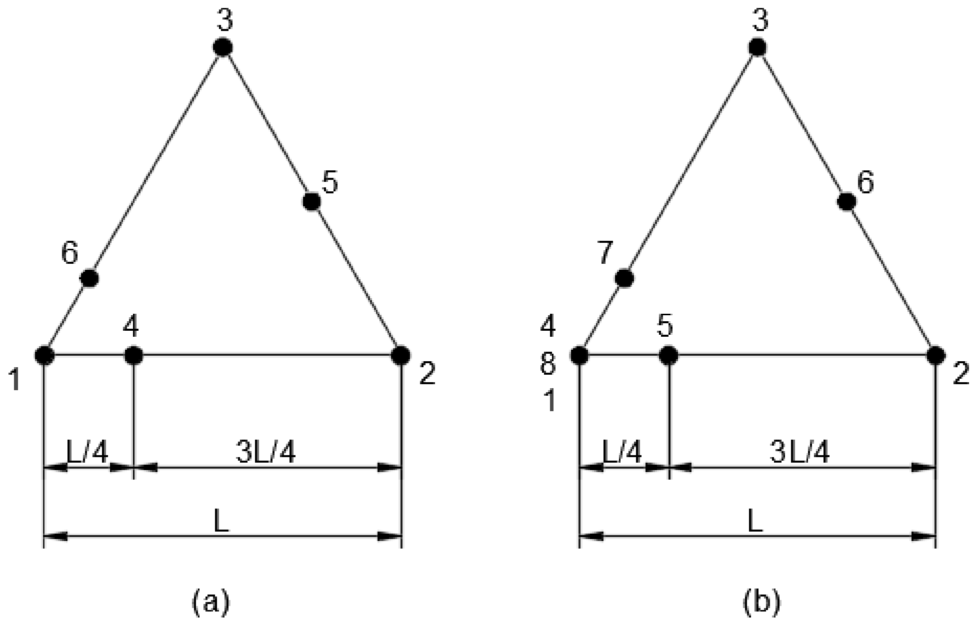


Figura 2.32: Elemento *quarter-point* T6 (a) e Q8 colapsado (b)

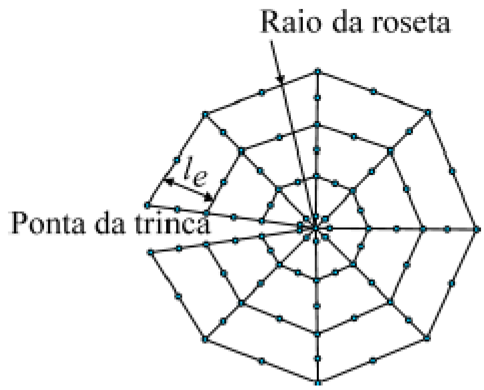


Figura 2.33: Exemplo de roseta na ponta da trinca (CORBANI, 2012)

O método de extrapolação das tensões normais relaciona as tensões nodais de uma malha em elementos finitos com os fatores de intensidade de tensões. São calculados fatores de intensidade de tensões virtuais, chamados de $K_I^*(r)$, utilizando pontos de extrapolação na região do ligamento remanescente, segundo a Figura 2.34.

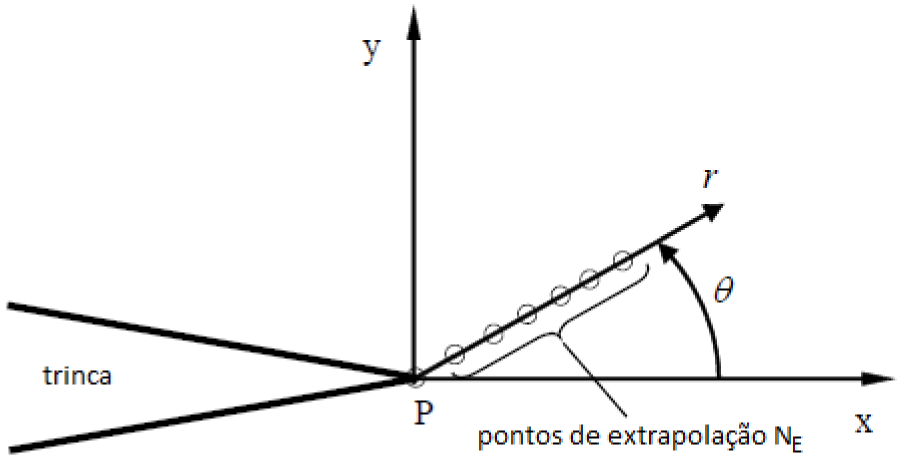


Figura 2.34: Pontos de extrapolação (PARTHEYMÜLLER, 1999, apud ZAFOŠNIK e FAJDIGA, 2016, p. 1674)

A partir do campo de tensões na região próxima à ponta da trinca, apresentado na equação 2.16, para $\theta = 0$ os valores de $K_I^*(r)$ são expressos como (PARTHEYMÜLLER, 1999, apud ZAFOŠNIK e FAJDIGA, 2016, p. 1674):

$$K_I^*(r) = \sigma_y \sqrt{2\pi r} \tag{2.54}$$

O valor de K_I é encontrado ajustando-se uma curva aos valores de $K_I^*(r)$, e extrapolando essa curva até a origem ($r = 0$), conforme esquematizado na Figura 2.35.

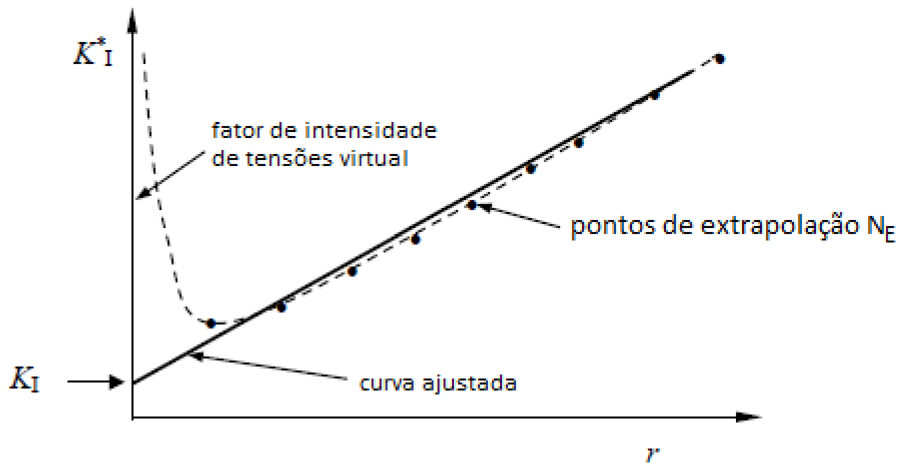


Figura 2.35: Extrapolação de K_I^* (adaptada de PARTHEYMÜLLER, 1999, apud ZAFOŠNIK e FAJDIGA, 2016, p. 1674)

2.6 Confiabilidade estrutural

Uma estrutura deve ser projetada e dimensionada para resistir às solicitações e diferentes condições de contorno a que estiver submetida durante sua vida útil.

Diversos dos parâmetros essenciais para o dimensionamento apresentam incertezas, de origem física, estatística, erro humano, dentre outros. Segundo PULIDO *et al.* (1992), essas incertezas influenciam significativamente a segurança estrutural.

Define-se como *modo de falha* uma forma de não atendimento aos critérios estipulados para a utilização da estrutura. Cada modo de falha da estrutura está relacionado a um estado limite, ou função de falha. BECK (2010) apresenta duas classificações para os estados limites:

- Estados limites últimos: estados limites correspondentes aos limites de segurança. O não atendimento causa colapso ou dano grave e permanente da estrutura, quase sempre de forma irreversível. Alguns exemplos são o movimento de corpo rígido e ruptura de algum membro (viga, pilar, sapata) ou conector (parafuso, rebite, solda).

- Estado limite de serviço: correspondem aos critérios de conforto, durabilidade e boa utilização. Aberturas de fissuras, deformação de membros, vibrações ou recalques excessivos são alguns dos exemplos.

Uma função de falha g é uma equação da forma:

$$g = R_f - S \tag{2.55}$$

onde as variáveis aleatórias R_f[8] e S usualmente representam a resistência de uma estrutura e as solicitações, respectivamente. No contexto de fadiga, podem ser utilizadas as distribuições do número de ciclos de vida útil e número de ciclos estimado numericamente para as variáveis R_f e S, respectivamente.

Para a análise de confiabilidade, devem ser adotadas modelagens matemáticas para as incertezas. Cada parâmetro que apresente imprecisão deve seguir uma distribuição probabilística. Neste trabalho, adotou-se a distribuição log-normal, segundo as recomendações do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001). Essa distribuição é caracterizada pelos parâmetros média (μ) e desvio padrão (σ). A Figura 2.36 apresenta algumas distribuições log-normais com diferentes parâmetros.

[8] Na literatura, R_f é definido como R. Definiu-se como R_f neste trabalho para diferenciar das demais grandezas representadas por R.

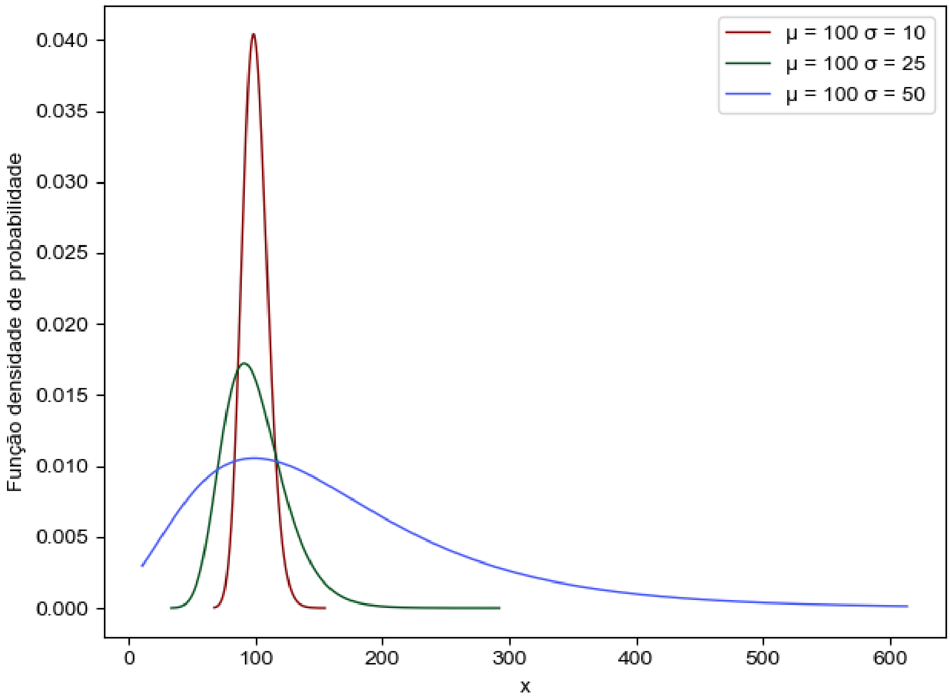


Figura 2.36: Distribuições log-normais com diferentes parâmetros μ e σ

As funções de falha podem ser equacionadas como $G(\boldsymbol{X})$, sendo $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2 ... X_n)$ o vetor que inclui as todas variáveis aleatórias que constituem as incertezas do problema. O domínio de falha D_f corresponde ao subconjunto do espaço amostral $\boldsymbol{X}$ que ocasiona a falha da estrutura. O domínio de segurança D_s é o subconjunto complementar a D_f. Ambos os domínios são apresentados na Figura 2.37. A fronteira entre o domínio de falha e de segurança da estrutura obedece à equação 2.56.

$$\begin{aligned} D_f &= \{x|G(x) \leq 0\} \\ D_s &= \{x|G(x) > 0\} \end{aligned} \tag{2.56}$$

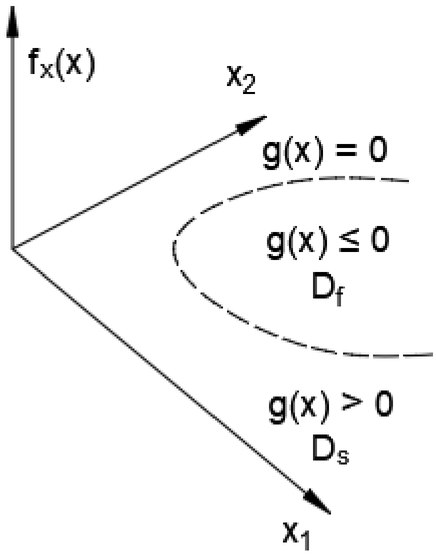


Figura 2.37: Domínios de falha D_f e de segurança D_s (adaptada de BECK, 2010, p. 77)

A probabilidade de falha P_f é uma medida da tendência ao não atendimento de um estado limite, e pode ser expressa como a integral da função conjunta de probabilidades $f_X(x)$ sobre o domínio de falha, conforme apresentado na equação 2.57. A avaliação dessa equação pode ser realizada de forma numérica, através da solução de uma integral em n dimensões, associada a um grande número de variáveis aleatórias.

$$P_f = P\left[\{\boldsymbol{X} \in D_f\}\right] = \int_{D_f} f_x(x)dx \tag{2.57}$$

Alternativamente, a integral sobre todo o domínio pode ser substituída por uma integral sobre o domínio de falha, com o auxílio da função indicadora $I(x)$:

$$I(x) = \begin{cases} 1, & se\, x \in D_f, \\ 0, & se\, x \in D_s. \end{cases} \tag{2.58}$$

Dessa forma, a equação 2.57 passa a ser escrita como:

$$P_f = \int_D I(x) f_x(x)dx. \tag{2.59}$$

Essa metodologia é conhecida como *Método de Monte Carlo*. De acordo com BECK (2010), o nome é uma referência à cidade de Monte Carlo, em Mônaco, famosa por seus cassinos. O método consiste em gerar um conjunto de amostras aleatórias x_i contidas em $\boldsymbol{X}$, e estimar a probabilidade de falha através da função indicadora $I(x_i)$. A probabilidade de falha estimada segundo a simulação de Monte Carlo é expressa como:

$$P_f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i). \tag{2.60}$$

A partir da variável aleatória g (equação 2.55), define-se o índice de confiabilidade β a partir dos parâmetros estatísticos da distribuição de g. O índice β é um parâmetro de referência utilizado para inferir a segurança da estrutura.

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \tag{2.61}$$

sendo μ_g e σ_g a média e o desvio padrão de g, respectivamente. A Figura 2.38 apresenta graficamente os conceitos de probabilidade de falha e índice β.

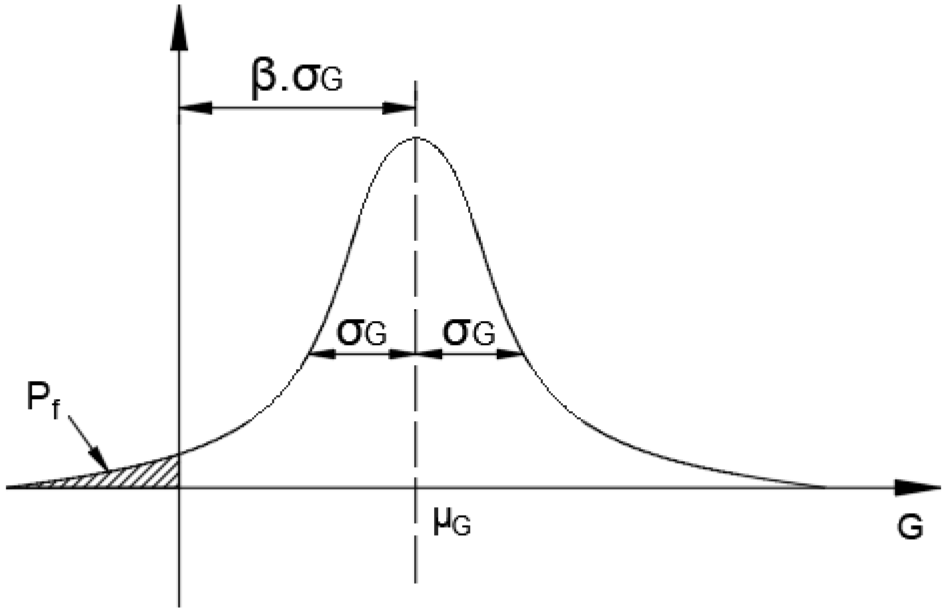


Figura 2.38: Índice β e probabilidade de falha

β é relacionado à probabilidade de falha segundo a equação 2.62, sendo Φ a função de distribuição cumulativa normal padrão.

$$P_f = \Phi(-\beta) \tag{2.62}$$

Capítulo 3

Análise numérica

O modelo sugerido para estimativa de número de ciclos associados à nucleação de trincas de fadiga em estruturas metálicas utiliza conceitos da MFLE e a abordagem por curvas S-N. Para uma geometria qualquer, não trincada e submetida a flutuação de tensões, temos que:

$$N_t = N_i + N_p \tag{3.1}$$

sendo N_i o número de ciclos necessários para iniciação de uma trinca, associado ao estágio I, N_p o número de ciclos necessários para sua propagação no estágio II, e N_t o número de ciclos de vida à fadiga até a ruptura final (considerando os estágios I e II).

Propõe-se utilizar uma curva S-N, apresentada na seção 2.2, aplicável ao material e à geometria em questão para obtenção de N_t. Para a obtenção de N_p, é necessário adotar-se um comprimento inicial de trinca a ser propagada, a_0. Esse comprimento inicial pode ser determinado por inspeções não destrutivas no componente. Todavia, ao utilizar inspeções não destrutivas para estimar a_0, os resultados serão muito conservadores devido às limitações da técnica (FORTH *et al.*, 2002). A abordagem de MERATI e EASTAUGH (2007) investiga experimentalmente as descontinuidades em uma liga de alumínio para estimar o comprimento inicial da trinca. Segundo LIU e MAHADEVAN (2009), a_0 é comumente adotado empiricamente, com dimensão de 0,25mm a 1,0mm, sendo essa a abordagem adotada neste trabalho. Adotou-se um comprimento estimado de 1,0mm em média, modelado como uma variável aleatória devido às incertezas associadas.

Assume-se que a trinca inicial se propagará no modo I até um comprimento crítico, a_f. Assim, o número de ciclos necessários para propagação, N_p é estimado utilizando-se uma lei de propagação, como a Lei de Paris, introduzida na seção 2.3.

Da posse de N_t e N_p, N_i é obtido por uma simples subtração.

$$N_i = N_t - N_p \tag{3.2}$$

Entretanto, alguns parâmetros essenciais do problema, como a tensão aplicada à peça, as propriedades do material, parâmetros das curvas S-N e da lei de propagação apresentam grandes incertezas. Consequentemente, sugere-se que sejam modelados como variáveis aleatórias e portanto, uma análise de confiabilidade estrutural é necessária. A teoria de confiabilidade estrutural foi apresentada na seção 2.6.

Nas seções a seguir, serão apresentados estudos de caso para a metodologia proposta, um dos quais foi utilizado como referência para as análises experimentais do Capítulo 4.

3.1 Estudo de caso: chapa com trinca de borda

Um primeiro estudo foi realizado com uma geometria simples: uma chapa de aço ASTM A-36, na qual é nucleada uma trinca de borda, apresentada na Figura 3.1.

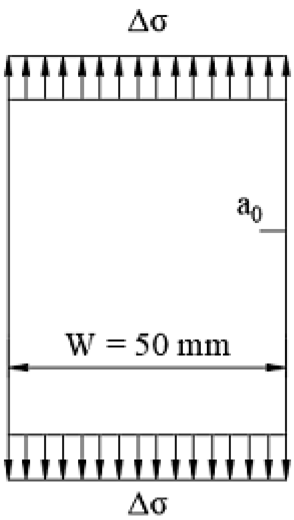


Figura 3.1: Geometria do primeiro estudo de caso

Para essa geometria, foi adotada a equação 3.3 para o fator de forma, apresentada por JANSSEN *et al.* (2002, p. 44):

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1,122 - 0,231\left(\frac{a}{W}\right) + 10,550\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 21,70\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 30,382\left(\frac{a}{W}\right)^4 \tag{3.3}$$

O número de ciclos de vida total à fadiga, N_t, foi determinado segundo a curva S-N C da norma RP C203 (DNV, 2012), cuja formulação é apresentada na equação

3.4. A amplitude de tensão foi corrigida pela equação de Goodman, descrita na seção 2.2.3.

$$\log N = \begin{cases} 12,593 - 3\log\Delta\sigma[MPa], & N \leq \times 10^7, \\ 16,320 - 3\log\Delta\sigma[MPa], & N > \times 10^7 \end{cases} \tag{3.4}$$

A curva $da/dN \times \Delta K$ proposta por BARSOM (1971), apresentada na equação 3.5, foi utilizada para determinação do número de ciclos associado à propagação da trinca, N_p.

$$\frac{da}{dN}[m/ciclo] = 188,5 \times 10^{-10}\left(\Delta K[MPa\sqrt{m}]\right)^3 \tag{3.5}$$

Foi adotado um carregamento com amplitude constante, com a tensão máxima igual a 125,0MPa e as razões de tensão variando de 0,2 a 0,6. A Tabela 3.1 apresenta as variáveis aleatórias utilizadas, relacionando-as com suas distribuições e parâmetros estatísticos (média, μ e coeficiente de variação, COV). A análise de confiabilidade foi realizada com um total de 10^5 amostras.

Tabela 3.1: Variáveis aleatórias adotadas

Grandeza	Unidade	Distribuição	Média	COV
Tensão mínima, σ_{min}	MPa	Log-normal	Variada	0,03
Tensão máxima, σ_{max}	MPa	Log-normal	125,0	0,03
Trinca inicial, a_0	mm	Normal	2,0	0,1
Tenacidade à fratura, K_{IC}	$MPa\sqrt{m}$	Log-normal	100,0	0,05
Tensão de escoamento, F_y	MPa	Normal	250,0	0,06
Tensão última, F_u	MPa	Determinística	400,0	-

Dois critérios para a ruptura da peça foram considerados:

- Ruptura por fratura, que ocorre quando o fator de intensidade de tensões máximo, na parte alta do ciclo, se iguala à tenacidade do material;
- Ruptura por colapso plástico, que ocorre quando a tensão no ligamento remanescente se equipara à tensão de escoamento do material.

De posse de N_t e N_p, o número de ciclos para iniciação da trinca foi encontrado segundo a equação 3.2. A Figura 3.2 apresenta o resultado obtido para R=0,2. O resultado para todos os valores de R consta na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Números de ciclos associados à iniciação e propagação – Ruptura por fratura

R	Iniciação		Propagação		Total	
	Média	COV	Média	COV	Média	COV
0,2	2646286	0,13	394	0,13	2646680	0,13
0,3	4180914	0,15	590	0,15	4181504	0,15
0,4	7048009	0,19	942	0,19	7048952	0,19
0,5	15828349	0,38	1642	0,22	15829991	0,38
0,6	55374379	0,53	3278	0,28	55377658	0,53

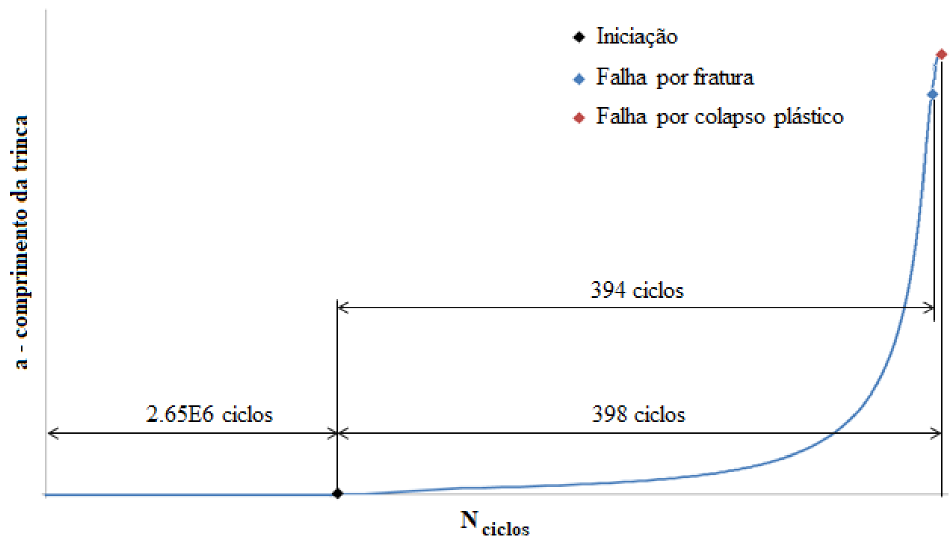


Figura 3.2: Resultados obtidos para R=0,2 (sem escala)

Os dados sugerem que cerca de 99% da vida útil da peça é atribuída à iniciação da trinca.

3.2 Estudo de caso: chapa com entalhe

Um segundo estudo foi aplicado a uma chapa com um entalhe de borda com um furo, sob tração, onde espera-se que seja iniciada uma trinca no plano perpendicular às tensões de tração. O material considerado foi o aço ASTM A-36, sujeito a um carregamento cíclico de amplitude constante, cuja geometria é apresentada na Figura 3.3.

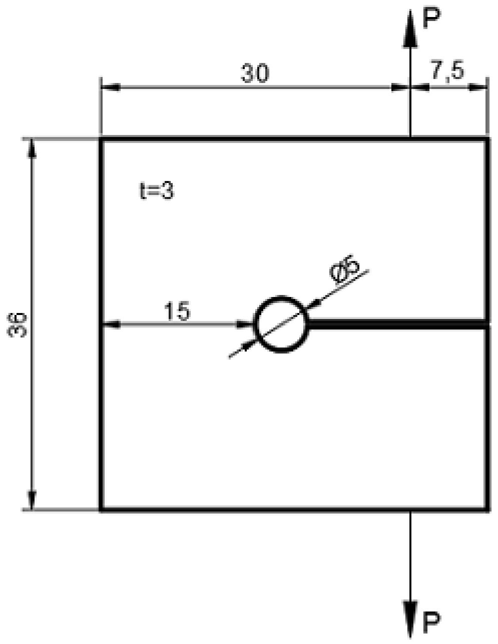


Figura 3.3: Geometria estudada (dimensões em milímetros)

A teoria de Wöhler foi aplicada utilizando-se uma curva S-N apresentada por WANG *et al.* (2010), obtida experimentalmente com corpos de prova fabricados com aço ASTM A36. A equação é apresentada na Figura 3.4.

$$\log N = -7,20 \log\left(\Delta\sigma[MPa]\right) + 22,60 \tag{3.6}$$

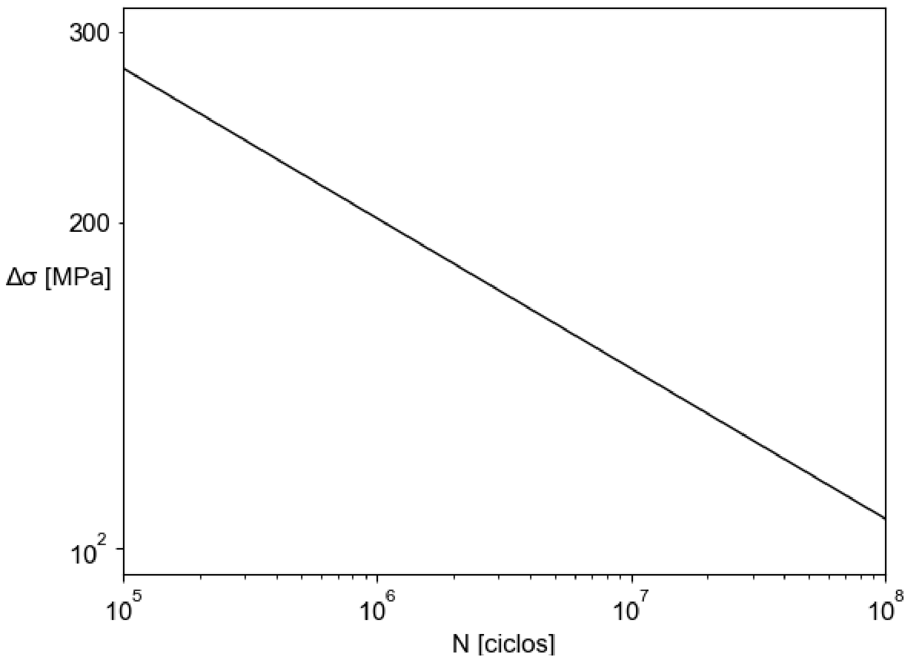


Figura 3.4: Curva S-N utilizada (adaptada de WANG *et al.*, 2010)

A curva proposta por Wang *et al.* foi obtida aplicando-se um carregamento axial cíclico, com razão de tensão igual a -1, diferente da razão de tensão adotada no problema. Portanto, foi aplicada a teoria de Gerber, apresentada na seção 2.2.3 para correção da tensão média, segundo a equação 2.4.

O fator de concentração de tensões, K_t, foi calculado através de um modelo em elementos finitos, segundo a metodologia apresentada na seção 2.2.2. O modelo foi desenvolvido utilizando o software Ansys Workbench®, versão 19.1, com licença estudantil (ANSYS INC.). Empregou-se a simetria da geometria e do carregamento do corpo de prova para modelar metade do corpo de prova CT, com apoios na região do ligamento remanescente e carregamento aplicado na região do pino.

Os elementos utilizados são do tipo T3 e Q4, de dimensão padrão de 2mm. Próximo à região do entalhe, do ligamento remanescente e dos furos, a malha foi refinada para adicionar precisão à solução. A análise realizada foi bidimensional com chapa de espessura de 3 mm. A Figura 3.5 apresenta a malha utilizada.

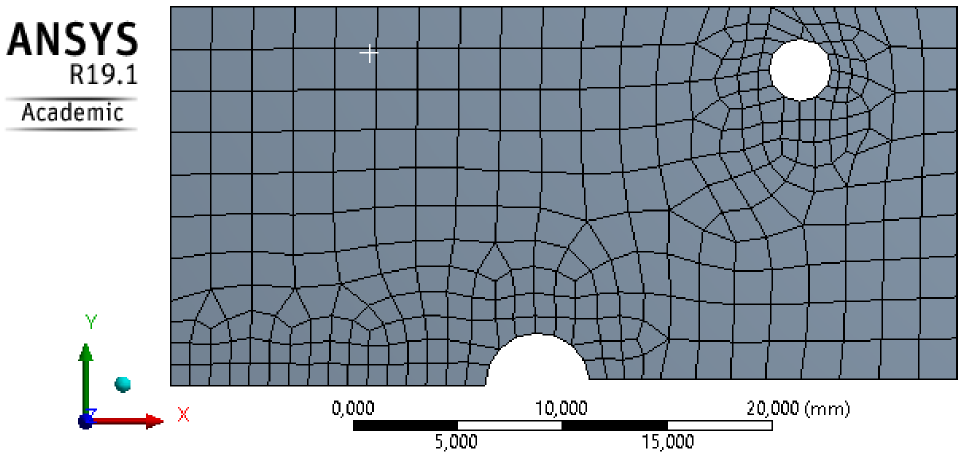


Figura 3.5: Malha utilizada

Os apoios foram aplicados ao longo da face do ligamento remanescente, com restrição de deslocamento na direção Y e demais deslocamentos e rotações livres. Um apoio com restrição na direção X foi aplicado a um nó, para possibilitar a estabilidade do modelo. Os elementos foram carregados por uma força de 1kN, aplicada à face do furo. As condições de contorno são apresentadas na Figura 3.6.

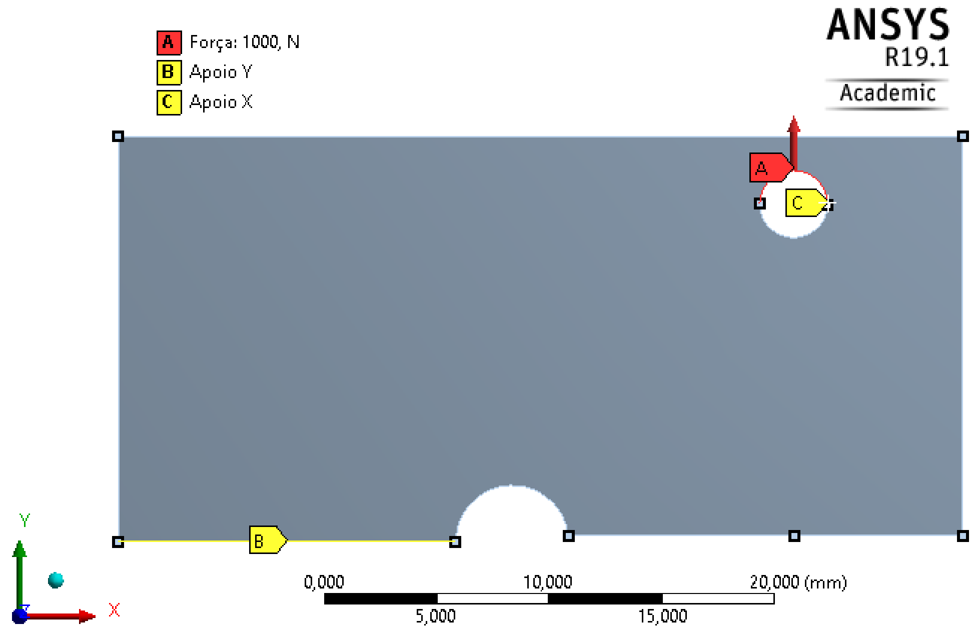


Figura 3.6: Condições de contorno

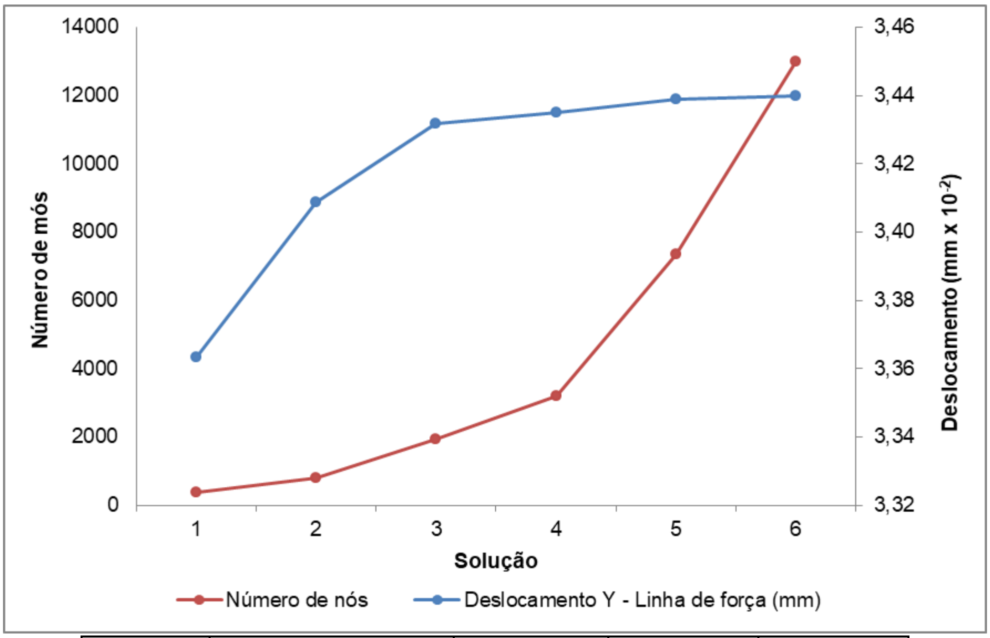
O material utilizado possui as propriedades indicadas na Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Propriedades do material

Propriedade	Valor
Módulo de elasticidade, E	20 GPa
Coeficiente de Poisson, v	0,3
Tensão de escoamento, F_y	250 MPa
Tensão última, F_u	400 MPa

A solução encontrada pelo MEF depende da discretização utilizada na malha. Resultados mais precisos geralmente são obtidos com uma malha mais refinada, entretanto, à medida que o refino acontece, o cálculo se torna mais complexo. A otimização da solução é feita através de um estudo de convergência, onde busca-se convergir os deslocamentos e/ou tensões nodais conforme critérios estabelecidos. Para a geometria em questão, a convergência da malha foi estipulada a partir da variação máxima de 0,05% nos deslocamentos nodais.

O software Ansys Workbench® (ANSYS INC.) possiu um algoritmo de convergência de malha automático, que foi utilizado nesta simulação. Foi selecionado o nó correspondente à linha de aplicação da força para medida dos deslocamentos na direção Y. Assim, obteve o gráfico ilustrado na Figura 3.7.



Solução	Deslocamento Y - Linha de força (mm)	Variação (%)	Número de nós	Número de elementos
1	3,36E-02	-	362	319
2	3,41E-02	1,34	798	735
3	3,43E-02	0,67	1940	1848
4	3,44E-02	0,10	3205	3073
5	3,44E-02	0,11	7363	7155
6	3,44E-02	0,03	12998	12694

Figura 3.7: Convergência dos deslocamentos nodais obtida pelo software Ansys Workbench®

As tensões principais máximas encontradas na região do ligamento após a convergência são apresentadas na Figura 3.8. A máxima tensão encontrada na região do entalhe é de 452,7 MPa.

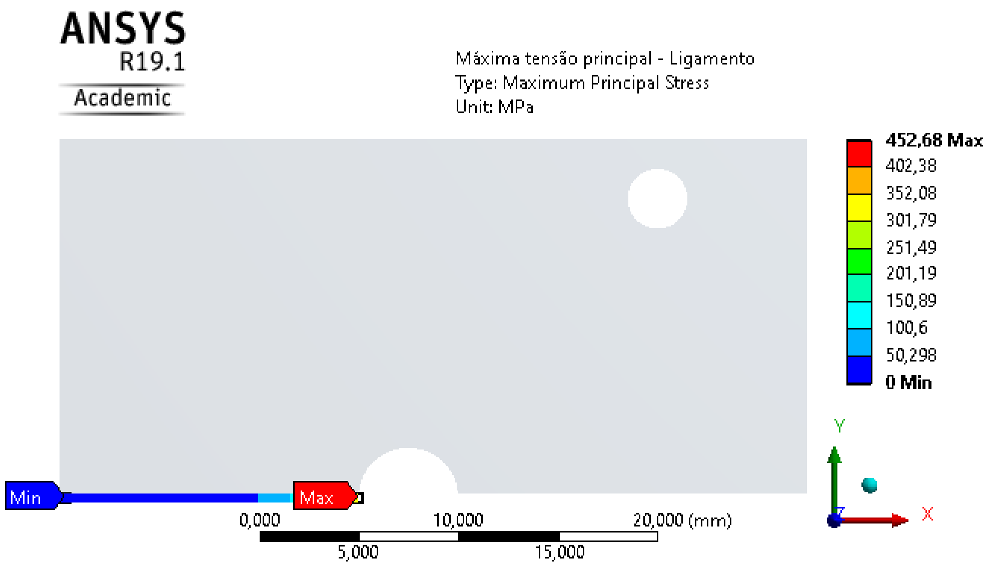


Figura 3.8: Máximas tensões principais

A estimativa de K_t foi feita segundo a metodologia apresentada na seção 2.2.2. A integral das tensões foi aproximada pelo método trapezoidal, com as tensões e coordenadas nodais da região do ligamento remanescente. A coordenada X do furo é igual a 15mm, e as distâncias x_i foram calculadas subtraindo-se cada coordenada nodal de 15mm. A distância até a linha neutra foi considerada como a metade da seção. Dessa forma, estimou-se o valor de 120,3 MPa para a tensão nominal, conforme a equação 2.2. Finalmente, K_t foi estimado segundo a equação 2.1.

$$K_t = \frac{452,7MPa}{120,3MPa} = 3,8 \tag{3.7}$$

Foi verificado também o K_t encontrado próximo aos pinos, para evitar o surgimento de trincas nessa região, em vez da região do entalhe, de interesse no estudo. A Figura 3.9 apresenta as tensões obtidas nessa região. Segundo a mesma metodologia, temos um K_t de 2,1, menor que o K_t na região do entalhe.

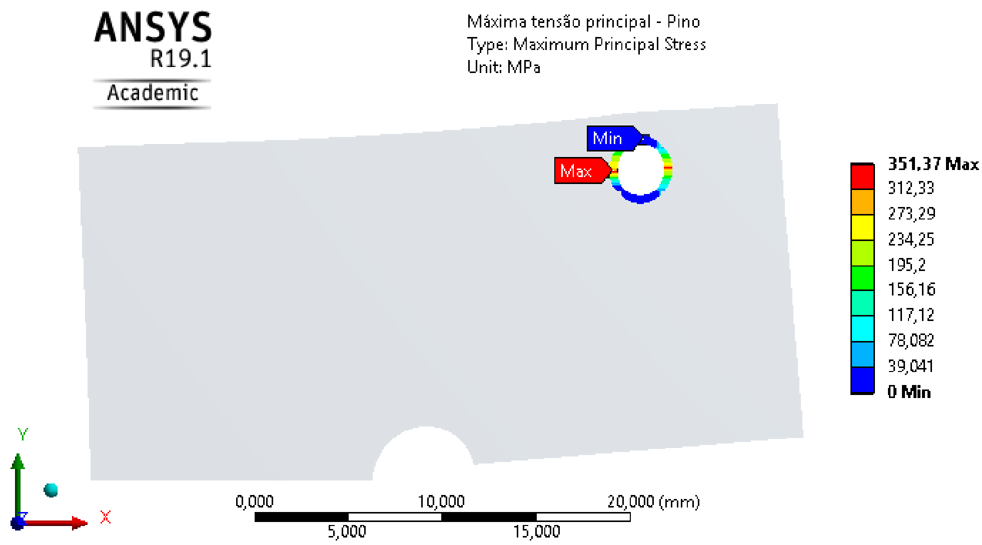


Figura 3.9: Máximas tensões principais – Região do pino

Conclui-se que a região preferencial para surgimento de trincas é a região do entalhe, sendo esse comportamento desejado para a geometria em questão.

A teoria de Paris foi adotada utilizando-se uma curva de propagação, segundo a teoria apresentada na seção 2.3.4. Empregou-se os resultados experimentais obtidos por CONLE (2014) para ajuste dos parâmetros da curva $da/dN \times \Delta K$. A curva ajustada é apresentada na Figura 3.10.

$$\frac{da}{dN}[m/ciclo] = 2,46 \times 10^{-14}(\Delta K[MPa\sqrt{m}])^{4,78} \tag{3.8}$$

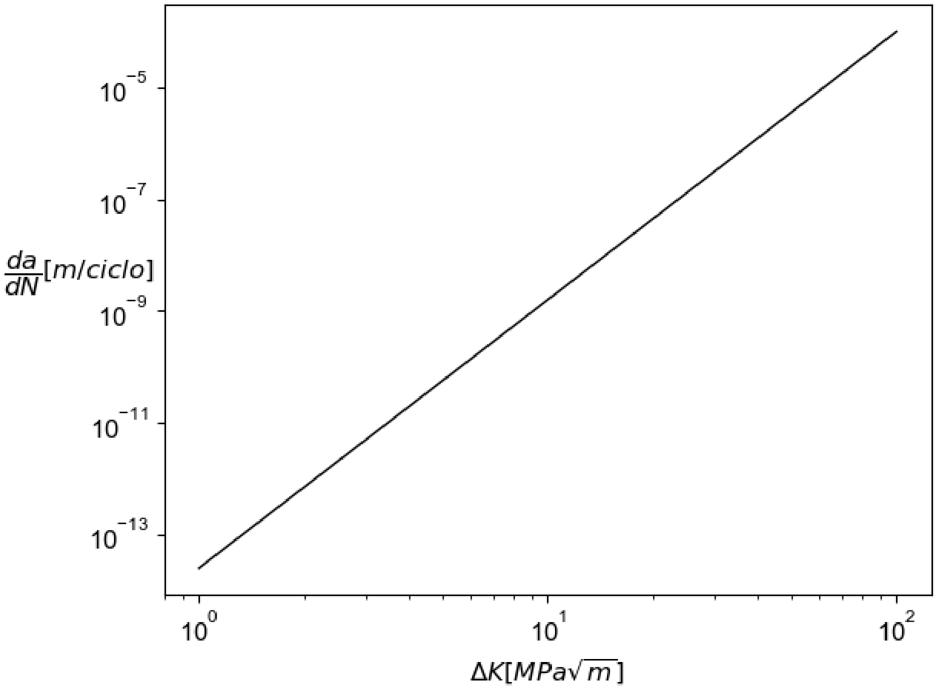


Figura 3.10: Curva $da/dN \times \Delta K$ utilizada (adaptada de CONLE, 2014)

Para análise da propagação da trinca pela metodologia da MFLE, foi necessário o ajuste de uma equação para K_I para a geometria estudada. Novamente foi utilizado o software *Ansys Workbench*®, versão 19.1, com licença estudantil (ANSYS INC.). Baseado na equação apresentada por BOWER (2009) para corpos de prova do tipo *Compact Tension* (CT), foi ajustada uma equação da forma:

$$K_I = \frac{P}{t}\sqrt{\frac{\pi}{W}}f(a/W) \tag{3.9}$$

onde P é a carga aplicada ao corpo de prova, a é o comprimento da trinca, t é a espessura e W a largura do corpo de prova.

Foram realizadas ao todo sete análises estáticas, com a/W variando de 0,55 a 0,85. Os valores de K_I foram calculados segundo a metodologia de extrapolação das tensões nodais, descrito no item 2.5.4. O modelo foi baseado naquele utilizado para a estimativa de K_t. A região próxima à trinca foi discretizada conforme a Figura 3.11.

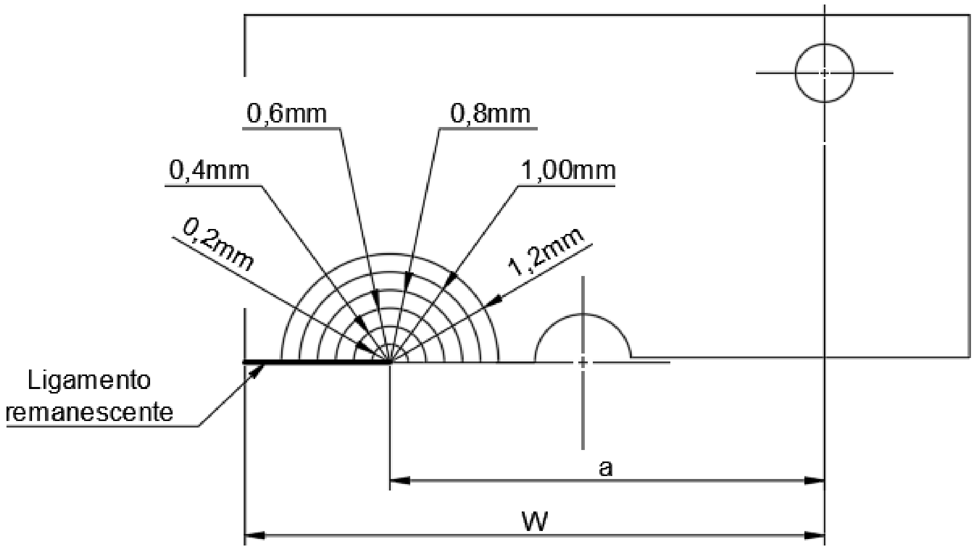


Figura 3.11: Discretização da malha para ajuste do fator de forma (Sem escala para possibilitar a representação da malha)

A malha utilizada e o detalhe da roseta na região da trinca são apresentados nas Figuras 3.12 e 3.13, respectivamente.

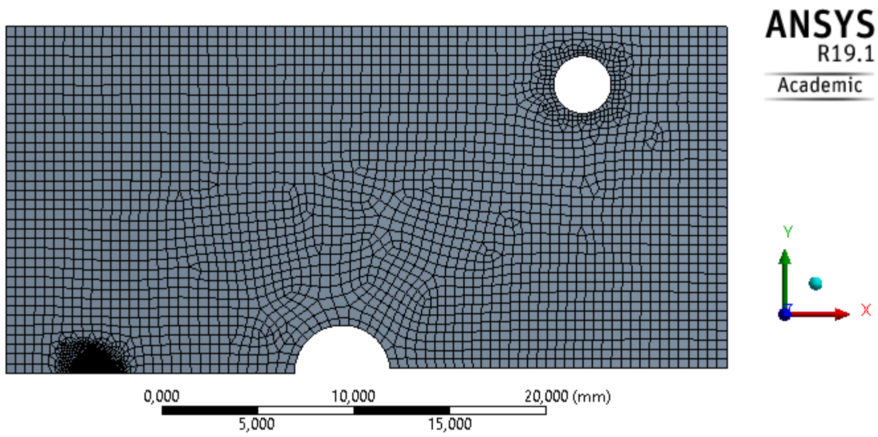


Figura 3.12: Exemplo de malha gerada para a/W = 0,70

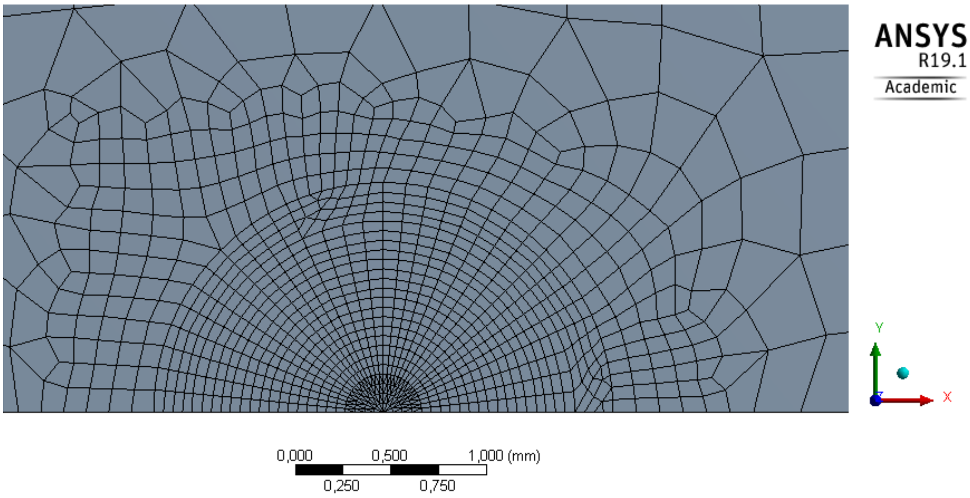


Figura 3.13: Detalhe da região próxima à trinca

Os tipos de elemento, o material utilizado e os critérios de convergência da malha são os mesmos adotados para a estimativa de K_t. As condições de contorno são similares, com o apoio na direção Y reduzido ao ligamento remanescente, conforme apresentado na Figura 3.14.

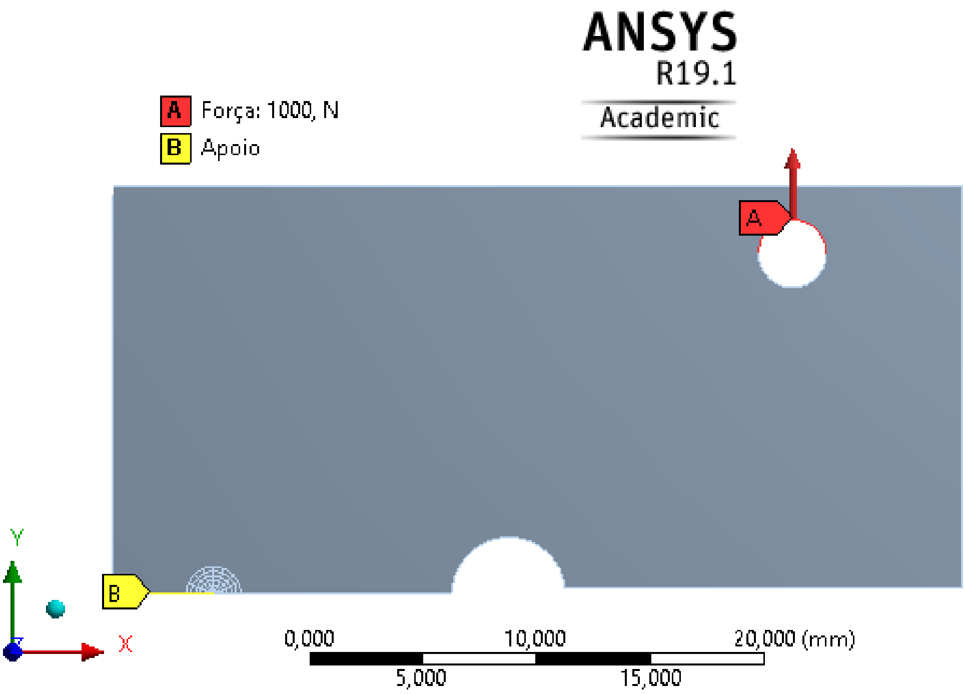


Figura 3.14: Condições de contorno

Os valores de K_I foram calculados por extrapolação das tensões nodais dos pontos (1) a (6) da Figura 3.15, segundo a equação 2.54. Dessa forma, K_I foi calculado ajustando-se uma curva aos valores de $K(r)$ obtidos em função das tensões normais encontradas nos pontos supracitados, para diferentes razões a/W.

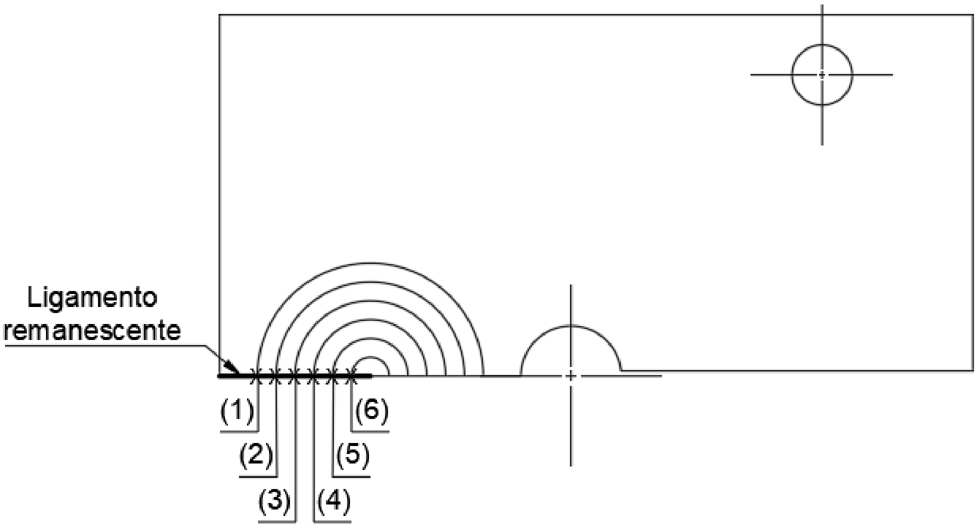


Figura 3.15: Pontos de extrapolação N_E

São apresentados nas Tabelas 3.4 a 3.10 os resultados para a/W variando de 0,55 a 0,85. Foram ajustadas curvas a esses resultados, que são apresentadas nas Figuras 3.16 a 3.22.

Tabela 3.4: Resultados para a/W = 0,55

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	538,0	19,1
2	0,4	386,0	19,4
3	0,6	314,5	19,3
4	0,8	269,5	19,1
5	1,0	237,3	18,8
6	1,2	212,3	18,4

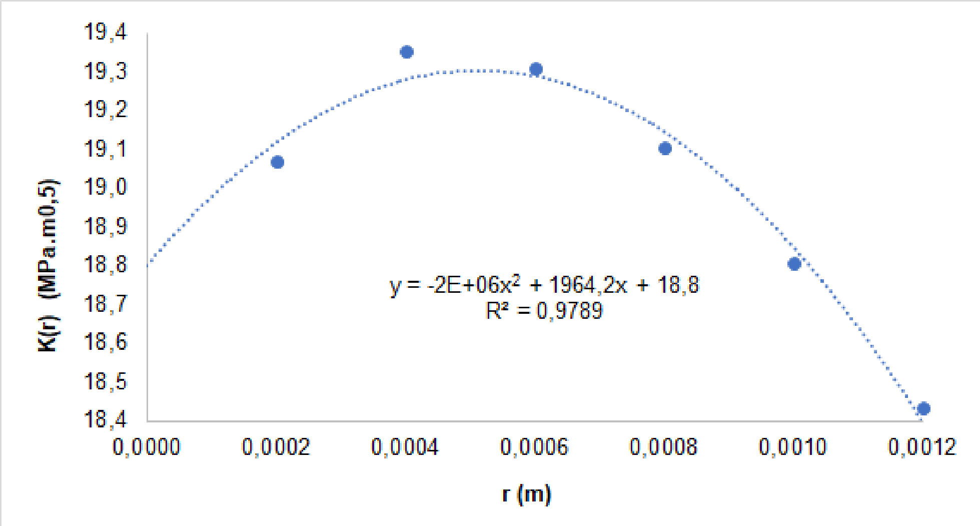


Figura 3.16: Curva ajustada para a/W = 0,55

Tabela 3.5: Resultados para a/W = 0,60

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	670,5	23,8
2	0,4	475,7	23,8
3	0,6	382,9	23,5
4	0,8	324,5	23,0
5	1,0	282,6	22,4
6	1,2	250,3	21,7

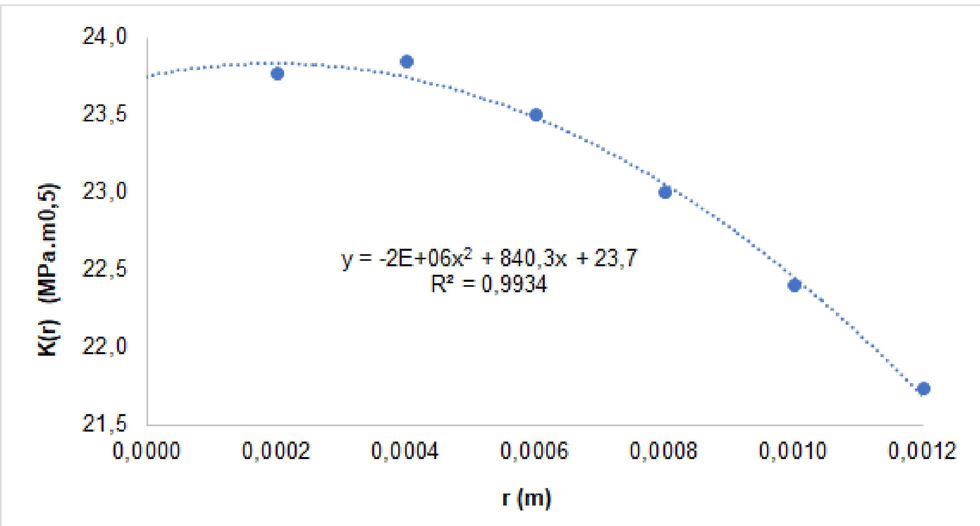


Figura 3.17: Curva ajustada para a/W = 0,60

Tabela 3.6: Resultados para a/W = 0,65

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	835,6	29,6
2	0,4	589,4	29,5
3	0,6	471,5	28,9
4	0,8	396,8	28,1
5	1,0	343,1	27,2
6	1,2	301,5	26,2

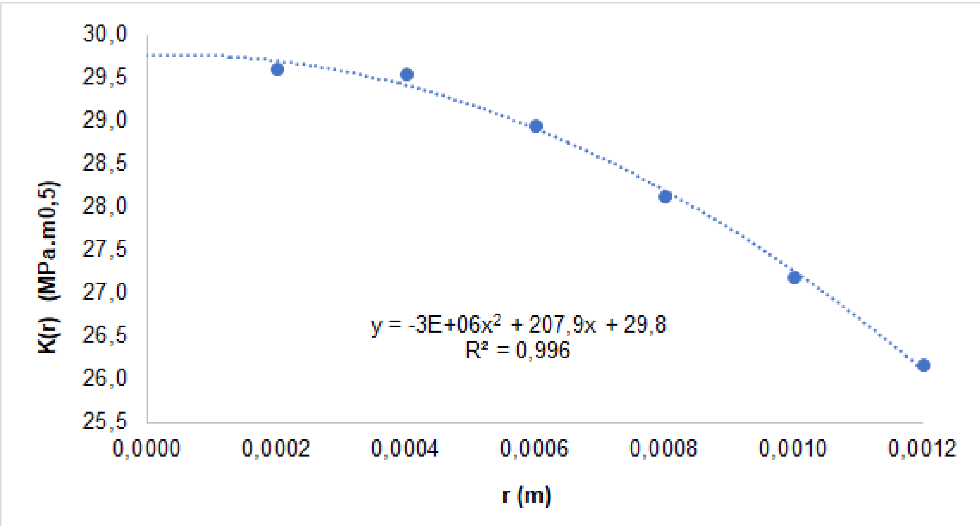


Figura 3.18: Curva ajustada para a/W = 0,65

Tabela 3.7: Resultados para a/W = 0,70

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	1071,6	38
2	0,4	750,0	37,6
3	0,6	595,1	36,5
4	0,8	496,4	35,2
5	1,0	425,0	33,7
6	1,2	369,3	32,1

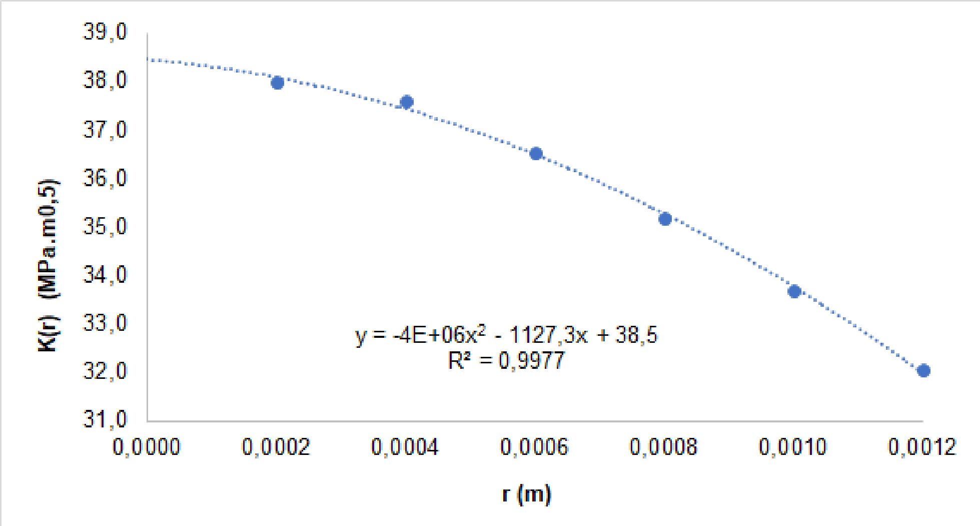


Figura 3.19: Curva ajustada para a/W = 0,70

Tabela 3.8: Resultados para a/W = 0,75

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	1432,4	50,8
2	0,4	991,1	49,7
3	0,6	776,8	47,7
4	0,8	639,1	45,3
5	1,0	538,5	42,7
6	1,2	459,4	39,9

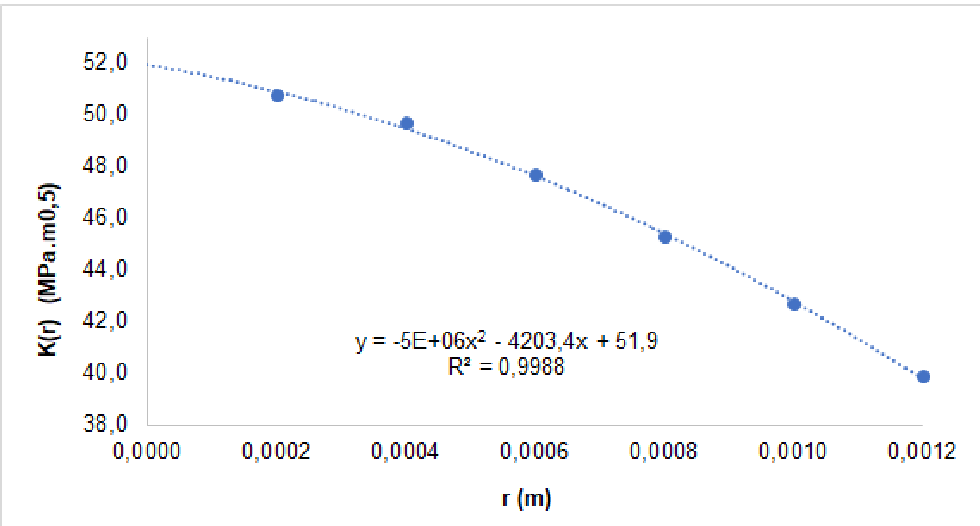


Figura 3.20: Curva ajustada para a/W = 0,75

Tabela 3.9: Resultados para a/W = 0,80

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	2029,4	71,9
2	0,4	1379,3	69,1
3	0,6	1059,4	65,0
4	0,8	851,1	60,3
5	1,0	697,0	55,2
6	1,2	573,8	49,8

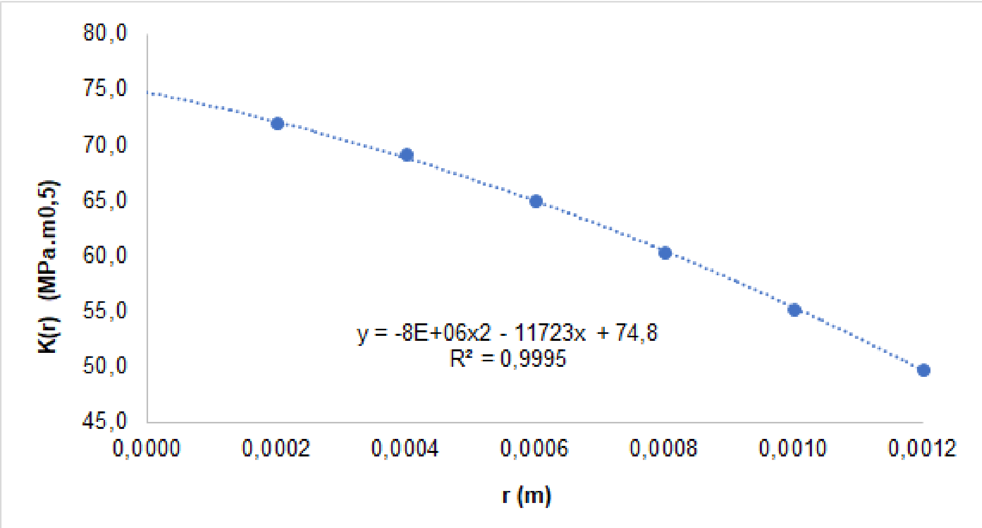


Figura 3.21: Curva ajustada para a/W = 0,80

Tabela 3.10: Resultados para a/W = 0,85

Ponto	r (mm)	σ_y	$K_r(MPa\sqrt{m})$
1	0,2	3140,9	111,3
2	0,4	2068,2	103,7
3	0,6	1528,7	93,9
4	0,8	1169,0	82,9
5	1,0	896,4	71,1
6	1,2	673,0	58,4

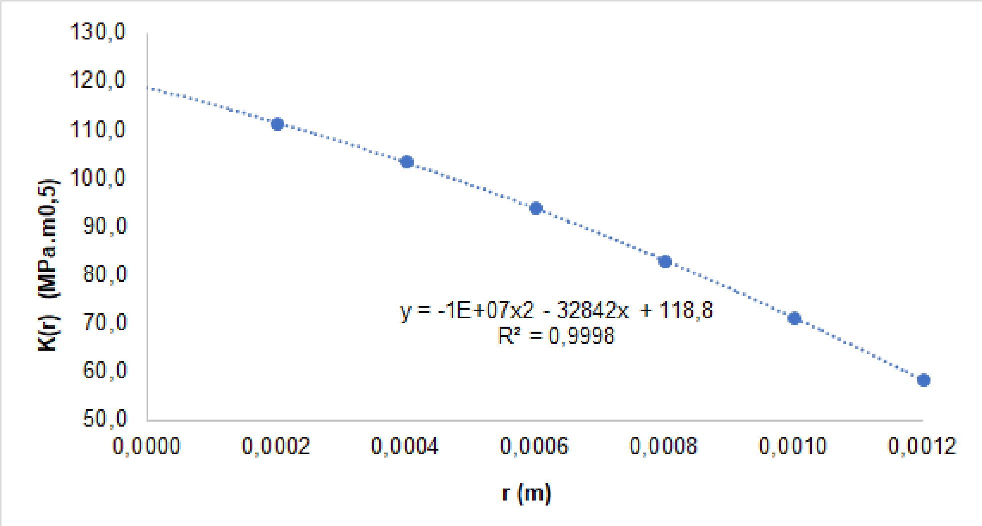


Figura 3.22: Curva ajustada para a/W = 0,85

Os valores encontrados para $K_I(a/W)$, obtidos pela extrapolação dos resultados das curvas ajustadas para $r = 0$, são apresentados na Tabela 3.11. A Figura 3.23 apresenta a curva ajustada para os valores de $K_I(a/W)$.

Tabela 3.11: Resultados obtidos para $K_I(a/W)$

a/W	$K_I(MPa\sqrt{m})$
0,55	18,8
0,60	23,7
0,65	29,8
0,70	38,5
0,75	51,9
0,80	74,8
0,85	118,8

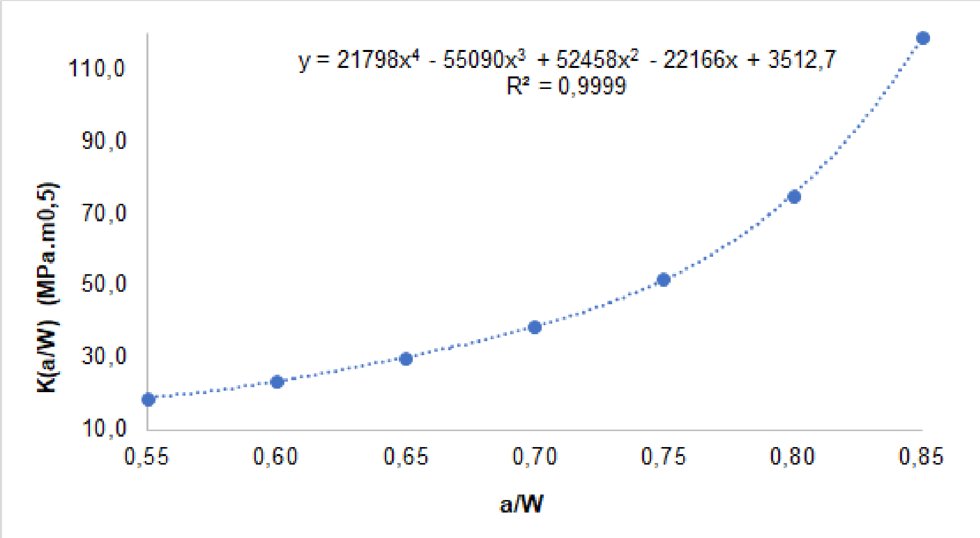


Figura 3.23: Curva ajustada para $K_I(a/W)$

Obteve-se então a seguinte equação ajustada à geometria proposta:

$$K_I\left(\frac{a}{W}\right) MPa\sqrt{m} = 21798\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 55090\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 52458\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 22116\frac{a}{W} + 3513 \quad (3.10)$$

Reescrevendo na forma da equação 3.9, utilizando P=1kN, t=3mm e W=30mm, temos:

$$K_I\left(\frac{a}{W}\right) MPa\sqrt{m} = \frac{P}{t}\sqrt{\frac{\pi}{W}}\left[202,1\left(\frac{a}{W}\right)^4 - 510,7\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 486,3\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 205,5\frac{a}{W} + 32,6\right] \quad (3.11)$$

A geometria do corpo de prova ensaiado, apresentado na Figura 4.1, tem um entalhe de 15,0mm. Considerando uma trinca inicial de 1,0mm, o comprimento de trinca a_0 a ser utilizado na metodologia da MFLE é de 16,0mm. A partir da equação 3.11, para o carregamento do problema, o valor de ΔK aplicado para a=16,0 mm é de 9,3 $MPa\sqrt{m}$. Segundo POOK (1972, p. 112), o limiar de propagação do aço ASTM A36, para R=0,1, é da ordem 7,0 $MPa\sqrt{m}$. Portanto, espera-se que a trinca iniciada na região de estudo se propague.

Novamente, uma análise de confiabilidade foi realizada, considerando as variáveis aleatórias apresentadas na Tabela 3.12. Adotou-se a distribuição log-normal segundo as recomendações do *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001).

Tabela 3.12: Variáveis aleatórias adotadas

Grandeza	Unidade	Média (μ)	Desvio padrão(σ)
Parâmetro C_w da curva S-N	–	22,60	0,05
Parâmetro m_w da curva S-N	–	7,20	0,05
Parâmetro C_p da curva $da/dN \times \Delta K$	–	$2{,}46\times10^{-14}$	$0{,}05\times10^{-14}$
Parâmetro m_p da curva $da/dN \times \Delta K$	–	4,78	0,05
Tenacidade à fratura, K_{IC}	$MPa\sqrt{m}$	100,0	5,0
Tensão última, F_u	MPa	500,0	5,0
Carga máxima, P_{max}	N	2000,0	5,0
Trinca inicial, a_0	mm	1,0	0,1
Trinca final, a_f	mm	3,8	0,3

A simulação de Monte Carlo foi realizada com um total de 10^5 amostras. Conforme será apresentado no Capítulo 4, os ensaios foram realizados até um comprimento de trinca de em média 3,5mm. É importante ressaltar que o comprimento final não é o comprimento crítico, quando o fator de intensidade de tensões atinge a tenacidade da fratura do material. O número de ciclos necessário para propagação até esse comprimento será grifado como $N_{\overline{p}}$. Duas funções de falha foram consideradas: g_1 associada à iniciação de trincas e g_2 associada ao número de ciclos para propagação da trinca até o comprimento final.

$$\begin{aligned} g_1 &= N - N_i \\ g_2 &= N - N_{\overline{p}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Uma simulação computacional na linguagem *Python* (PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2019) foi elaborada para a análise de confiabilidade. Aplicou-se o conceito de processamento paralelo, assim foi possível reduzir o tempo de análise. O código encontra-se no Anexo A. Os resultados das análises se encontram no Capítulo 5.

Capítulo 4

Metodologia experimental

4.1 Material utilizado

Para validação do modelo numérico, foram realizados experimentos com corpos de prova de geometria simples, com concentradores de tensão que permitam que seja possível prever o local e a direção de iniciação de trincas de fadiga. A geometria utilizada, apresentada na Figura 4.1, é a mesma geometria do estudo de caso apresentado na seção 3.2.

Essa geometria foi baseada em recomendações das normas E647 (ASTM, 2015) e E1820 (ASTM, 2018) para corpos de prova CT. Estudou-se e ajustou-se os detalhes para atender às seguintes condições:

- A tensão máxima na região do entalhe deve ser menor que a tensão de escoamento do material, para que fosse aplicável a metodologia por curvas S-N;
- A variação de intensidade de tensões para a trinca inicial a_0 na região próxima ao entalhe deve ser maior que o limiar de propagação do material, para que haja propagação desta trinca;
- Para a peça não trincada, o K_t nos furos deve ser inferior ao K_t na região do entalhe, para que a região onde será iniciada a trinca seja a do entalhe.

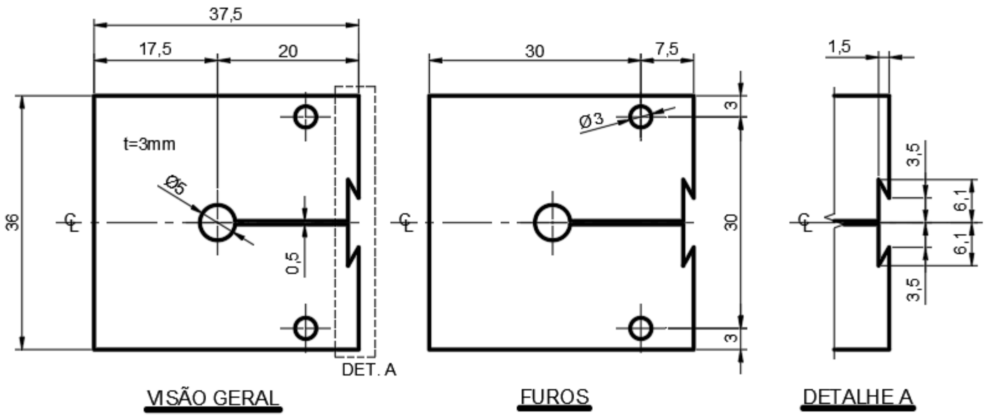


Figura 4.1: Corpo de prova utilizado (Dimensões em mm)

Optou-se por realizar os ensaios com metal base, que não passou por nenhum processo de soldagem ou tratamento térmico, de forma a minorar as variáveis envolvidas no fenômeno estudado. O material utilizado é aço ASTM A36 ASTM (2014), que é largamente usado em estruturas (CBCA, 2014). Esse aço é classificado como um aço carbono de média resistência mecânica; suas propriedades constam na Tabela 4.1. As peças foram usinadas a partir de chapas laminadas a quente, com espessura de 3mm. A espessura foi selecionada para evitar presença de tensões triaxiais durante os ensaios, mantendo-se assim os corpos de prova em EPT durante os ciclos de carregamento. Foram ensaiados ao total três corpos de prova.

Tabela 4.1: Propriedades mecânicas do aço ASTM A36 (ASTM, 2014, p. 2)

Propriedade	Valor
Tensão de escoamento	250 MPa
Tensão última	400 MPa
Alongamento mínimo em 50 mm	23%
Alongamento mínimo em 200 mm	20%

4.2 Preparação dos corpos de prova

Após a usinagem, os corpos de prova foram polidos com lixas d'água 600 e 1200, para reduzir as linhas superficiais resultantes da laminação, que podem dificultar a visualização da trinca. Foi utilizado um traçador de altura da marca MITUTOYO (2019), exibido na Figura 4.2, para riscar linhas paralelas espaçadas a cada 0,5mm a partir do furo central. Essas linhas foram marcadas visando facilitar a estimativa do comprimento da trinca na análise visual da peça, durante os ensaios. A Figura 4.3 apresenta o corpo de prova após esse processo.

Figura 4.2: Traçador de altura utilizado

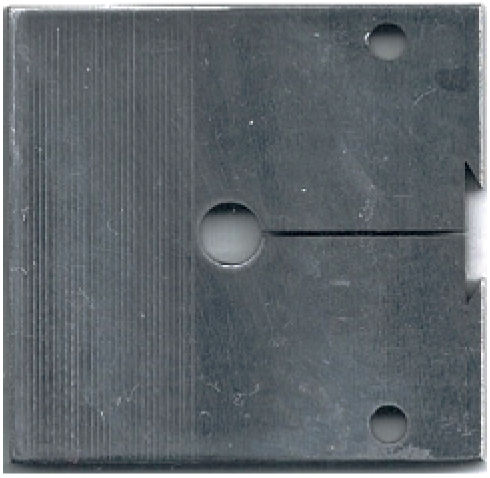


Figura 4.3: Corpo de prova após o processo de riscagem

4.3 Procedimento dos ensaios

Os ensaios foram realizados com uma frequência de 30Hz e sob amplitude de tensões constante, segundo as recomendações da norma E647 ASTM (2015). O carregamento utilizado foi de máximo de 2,0kN e R=0,1, conforme o estudo de caso apresentado na seção 3.2. Selecionou-se esse valor de R para que todos os ciclos fossem trativos, reduzindo-se assim o fenômeno de fechamento de trincas.

A instrumentação foi realizada por meio de extensômetros utilizando o método de *compliance*, segundo diretrizes do Anexo 5 - "*Guidelines for Use of Compliance to Determine Crack Size*", da norma E647 ASTM (2015). A Figura 4.4 apresenta uma imagem do *clip gauge* conectado ao corpo de prova.

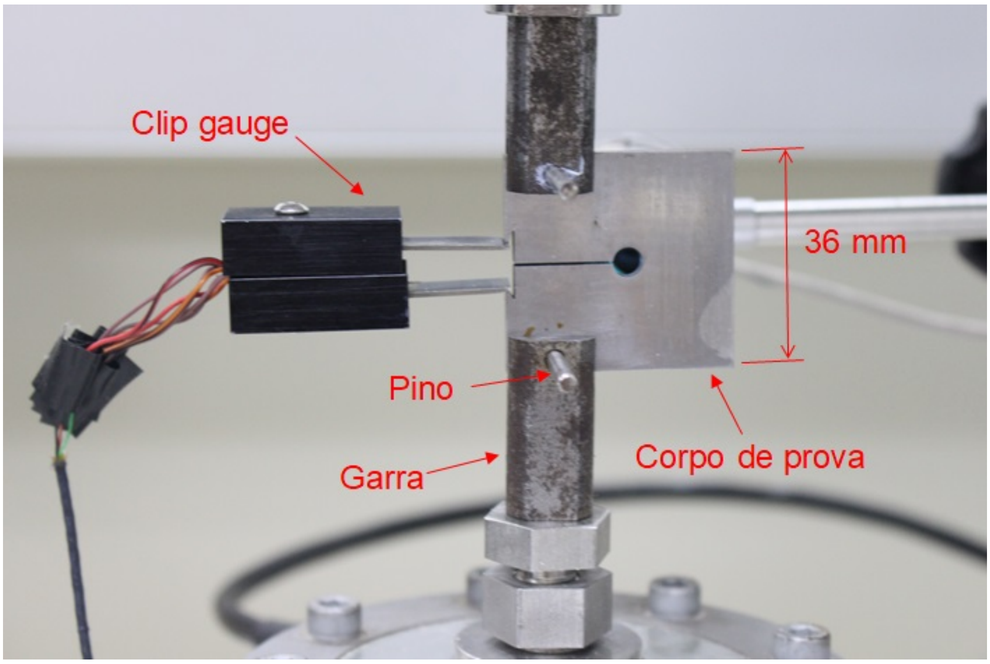


Figura 4.4: *Clip gauge* conectado ao corpo de prova

O carregamento e acompanhamento do ensaio pelo método compliance foi realizado com auxílio do equipamento EletroPuls E3000 (INSTRON, 2019). O equipamento é controlado pelo software *Fatigue Crack Propagation* V8.4 (INSTRON, 2005), que foi configurado para o problema estudado conforme a Figura 4.5.

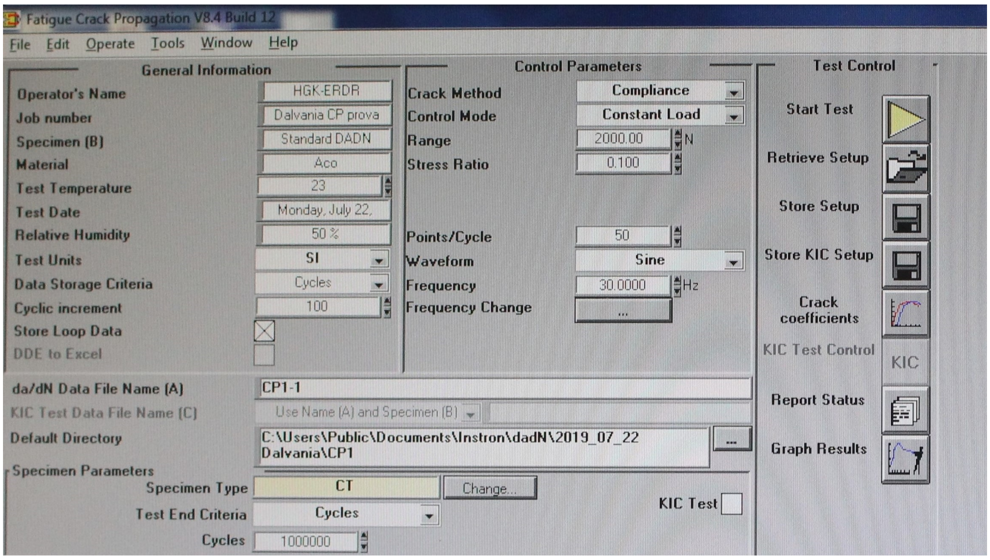


Figura 4.5: Configuração do software *Fatigue Crack Propagation*

A Figura 4.6 apresenta um *printscreen* do software durante a realização dos ensaios.

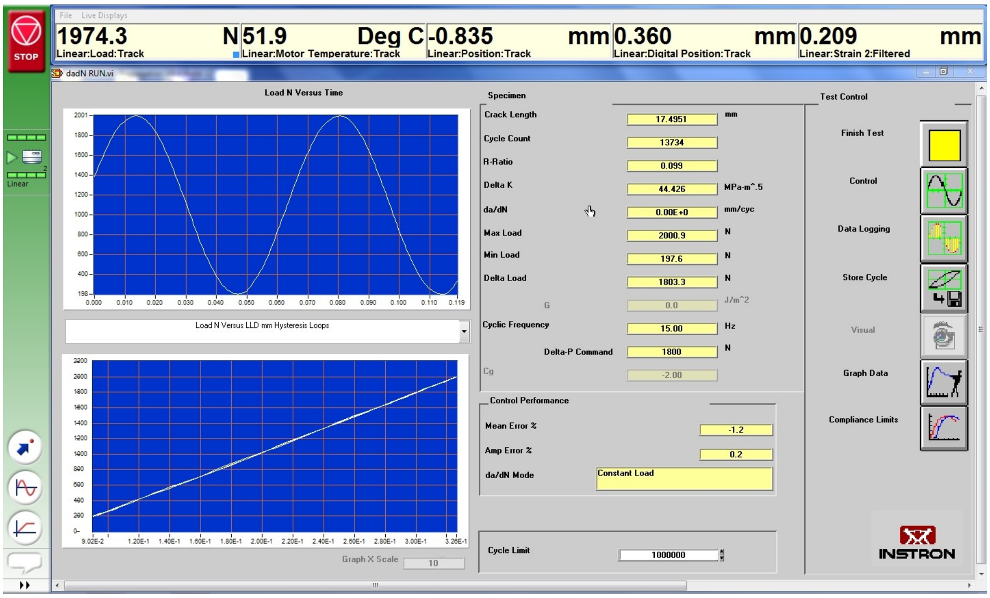


Figura 4.6: Acompanhamento dos ensaios com o software *Fatigue Crack Propagation*

A iniciação da trinca é percebida pela variação na flexibilidade (C), conforme esquematizado na Figura 4.7.

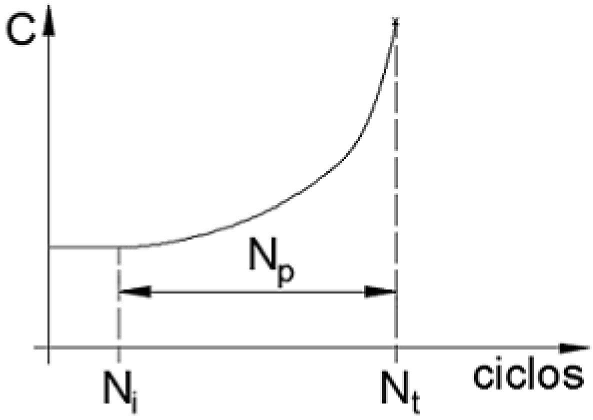


Figura 4.7: Variação da flexibilidade da peça ao longo dos ciclos de carregamento

Foram utilizadas duas câmeras para acompanhamento dos ensaios, uma em cada face do corpo de prova, conforme apresentado na Figura 4.8. Ambas as câmeras foram conectadas a um computador, sendo a análise visual do crescimento da trinca feita a partir dessas imagens. Utilizou-se o software CamStudio CAMSTUDIO (2019) para capturar uma imagem a cada 2 segundos. Duas dessas imagens são exibidas na Figura 4.9.

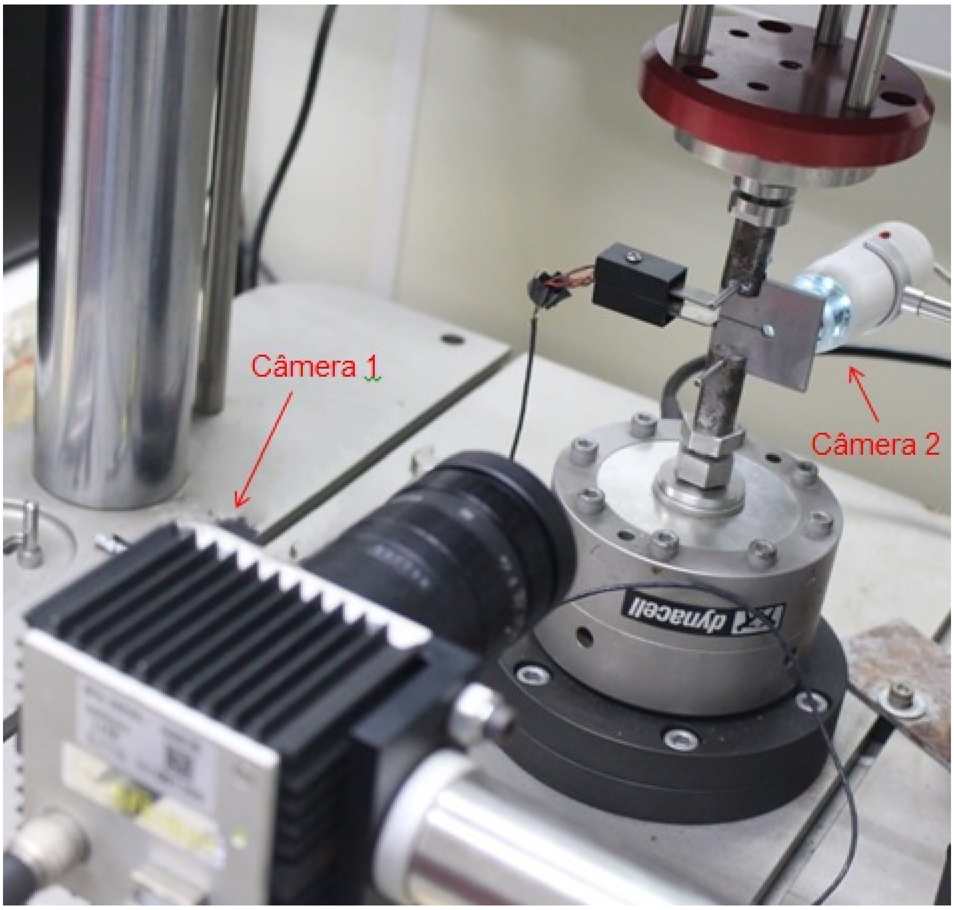


Figura 4.8: Posicionamento das câmeras

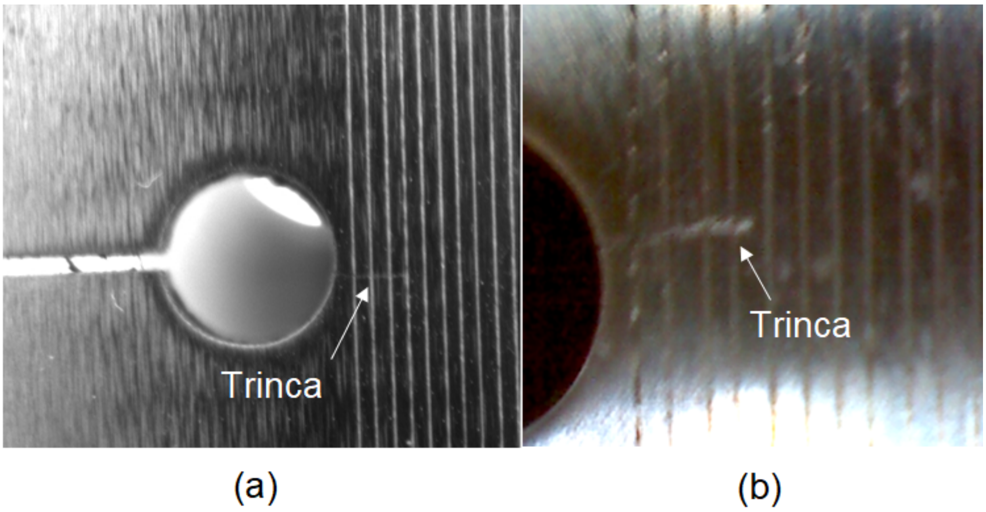


Figura 4.9: Imagens da câmera 1 (a) e câmera 2 (b), obtidas durante os ensaios

Os corpos de prova foram ensaiados até que a abertura das faces da trinca atingisse o limite de abertura do *clip gauge*, não havendo então ruptura das peças. São exportados pelo software da Instron arquivos de texto no formato .lop, contendo os valores de abertura do *clip gauge* durante os ciclos de carregamento, cujos dados foram utilizados na análise apresentada no Capítulo 5.

As Figuras 4.10 a 4.12 apresentam os os corpos de prova trincados após o ensaio.

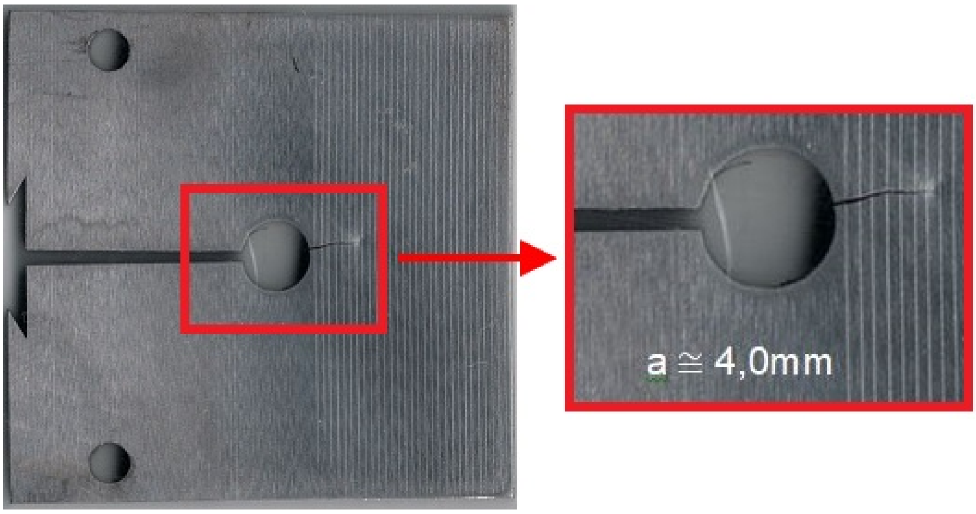


Figura 4.10: Corpo de prova 01 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 4,0mm

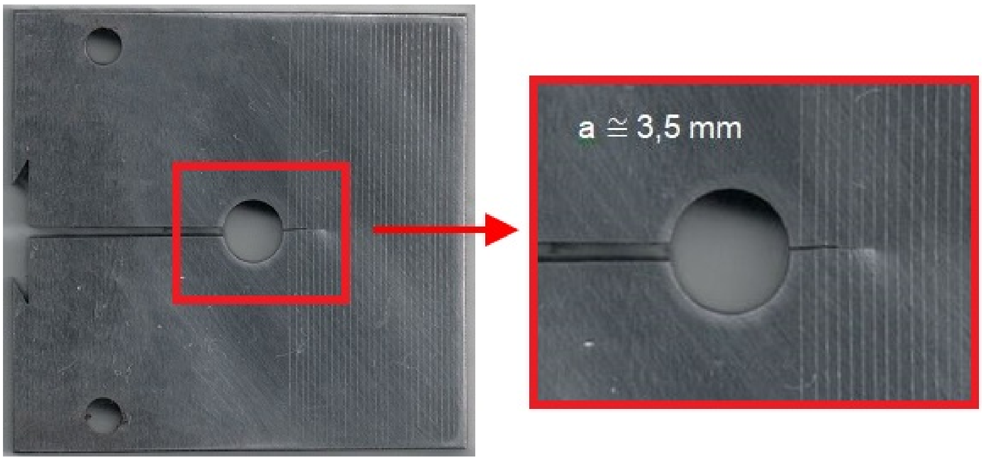


Figura 4.11: Corpo de prova 02 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 3,5mm

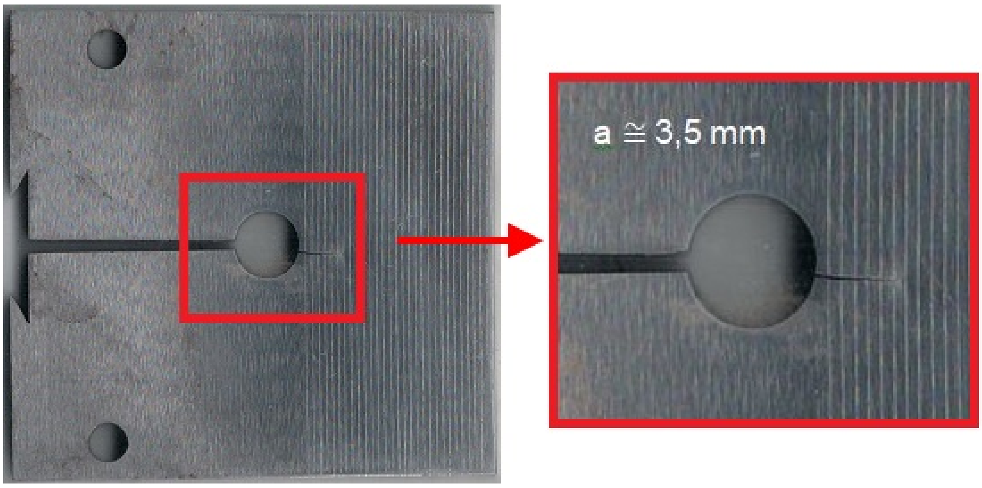


Figura 4.12: Corpo de prova 03 trincado após o ensaio, com trinca final de aproximadamente 3,5mm

Capítulo 5

Resultados e Discussões

5.1 Resultados da análise experimental

Durante os experimentos, foi realizada a medição da abertura do *clip-gauge*, em 50 posições de cada ciclo de carregamento. A abertura do *clip-gauge* corresponde ao CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*). A partir dessas medições, os dados foram tratados para obtenção dos valores mínimos (na parte baixa do ciclo), médio e máximo (na parte alta do ciclo) do CMOD, conforme esquematizado na Figura 5.1. Os valores mínimos, médios e máximos constam no Anexo B.

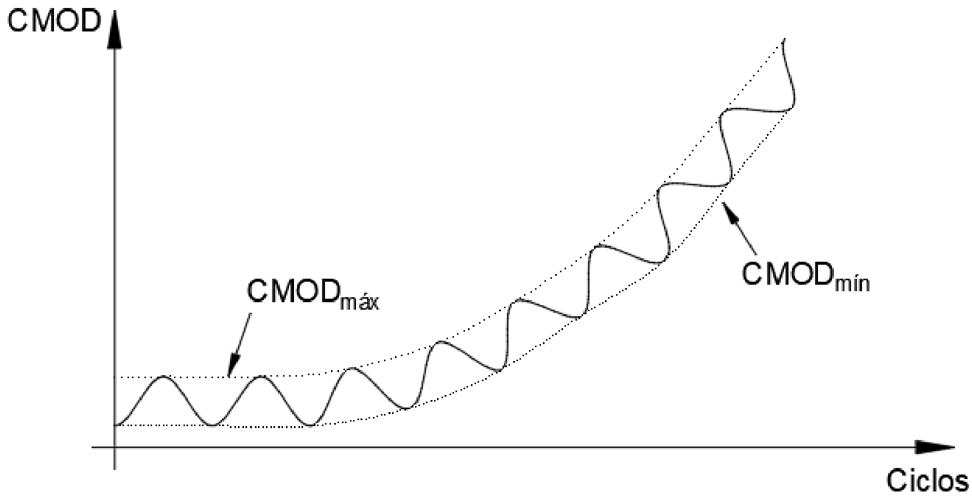


Figura 5.1: Curva típica de CMOD durante o ensaio

O aumento no CMOD deve-se ao aumento do *compliance* da peça, sugerindo a iniciação de uma trinca e a transição do estágio I para o estágio II. Estimou-se o limite entre estágios I e II pela análise do CMOD ao longo dos ciclos e da taxa de crescimento de CMOD por ciclo. Conforme apresentado no Capítulo 4, não houve ruptura das peças, dessa forma os resultados não contemplam o estágio III. Portanto, da análise dos dados é possível estimar N_i e $N_{\overline{p}}$. As Figuras 5.2 e 5.3 apresentam a variação de CMOD ao longo dos ciclos, para cada corpo de prova, além da taxa de crescimento do CMOD.

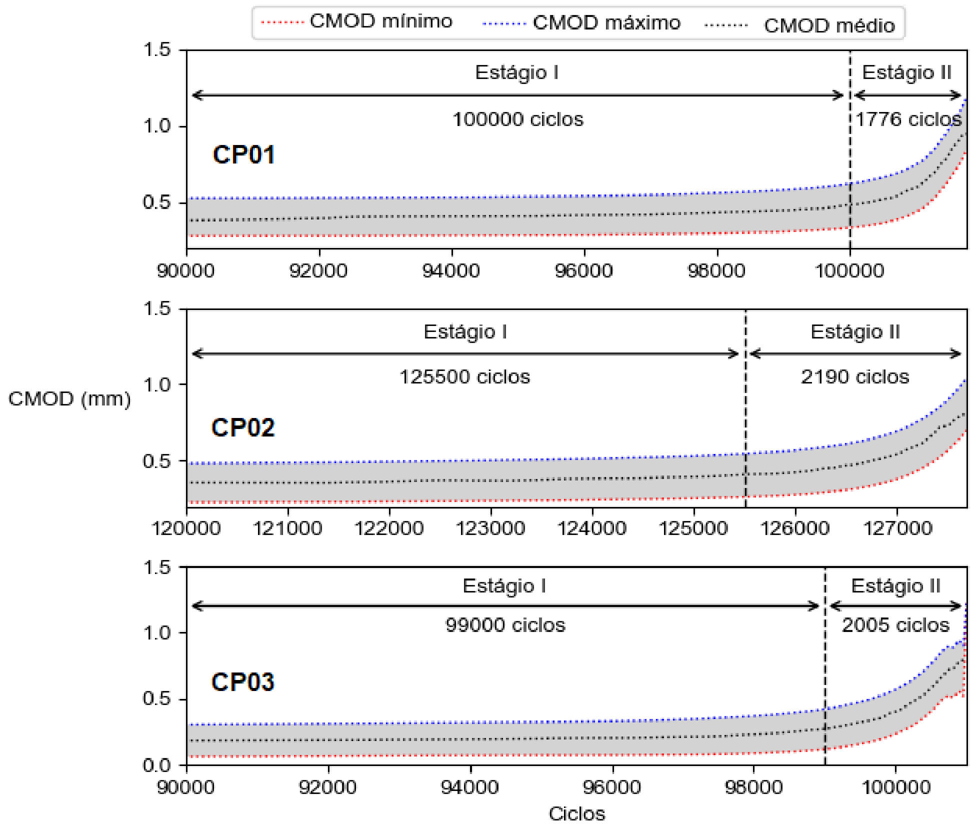


Figura 5.2: Resultados de CMOD (mm)

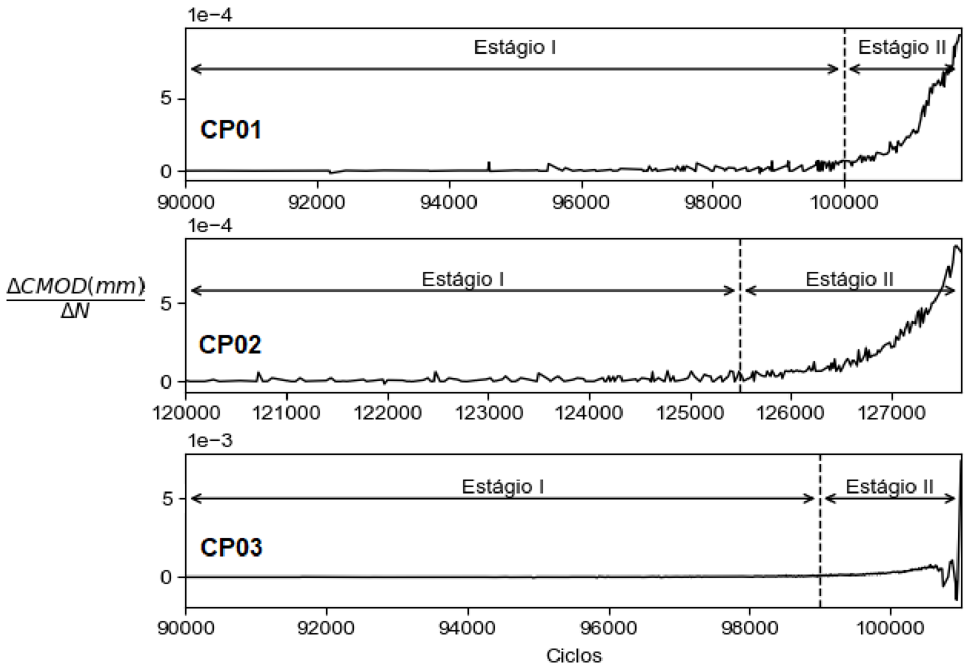


Figura 5.3: Taxa de crescimento do CMOD (mm)

Os valores obtidos experimentalmente, que constam na Tabela 5.1, serão comparados com os resultados da análise numérica, a fim de validar o modelo proposto.

Tabela 5.1: Resumo dos resultados da análise experimental

CP	N_i	$N_{\overline{p}}$	$a_f(mm)$
CP01	100.000	1.776	4,0
CP02	125.500	2.190	3,5
CP03	99.000	2.005	3,5
Média	108.000	1.990	3,7
Desvio padrão	14.731	207	0,3

A Figura 5.4 apresenta as distribuições lognormais de N_i, $N_{\overline{p}}$ e a_f, obtidas através das médias e desvios padrões apresentados na Tabela 5.1.

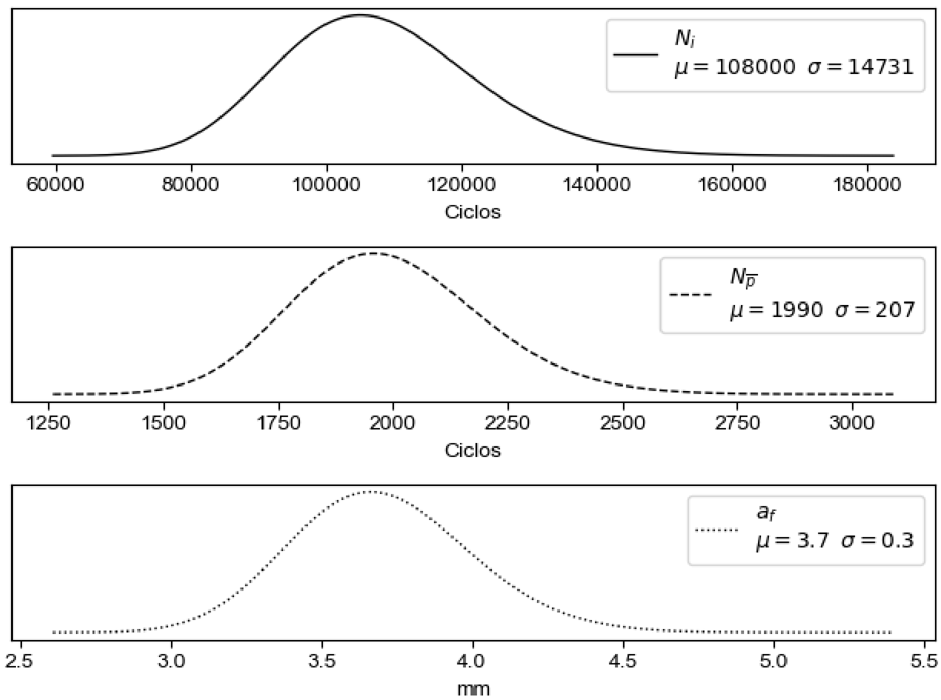


Figura 5.4: Distribuições lognormais de N_i, $N_{\overline{p}}$ e a_f, estimadas experimentalmente

5.2 Resultados da análise numérica

A análise numérica foi realizada conforme os critérios apresentados no Capítulo 3. Foram obtidas as distribuições apresentadas na Figura 5.5. Também foram estimados os números de ciclos para propagação da trinca até o limite do *clip-gauge*, $N_{\overline{p}}$.

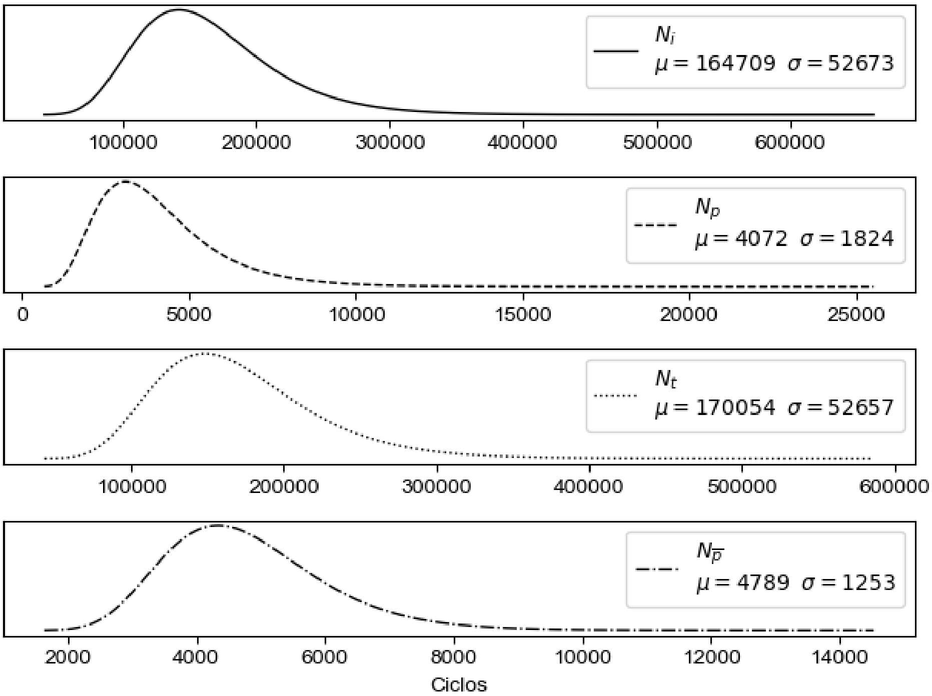


Figura 5.5: Distribuições lognormais de N_i, N_p, N_t e $N_{\overline{p}}$, estimadas numericamente

A Tabela 5.2 resume os resultados obtidos na análise.

Tabela 5.2: Resumo dos resultados da análise numérica

	N_i	$N_{\overline{p}}$
Média	156.352	4.595
Desvio padrão	46.649	1.299

As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam a probabilidade de falha e o índice β, resultados da análise de confiabilidade, realizada segundo as funções de falha apresentadas na seção 3.2. O índice β é reduzido com o aumento do número de ciclos, para ambos os estados limites, o que condiz com o comportamento esperado.

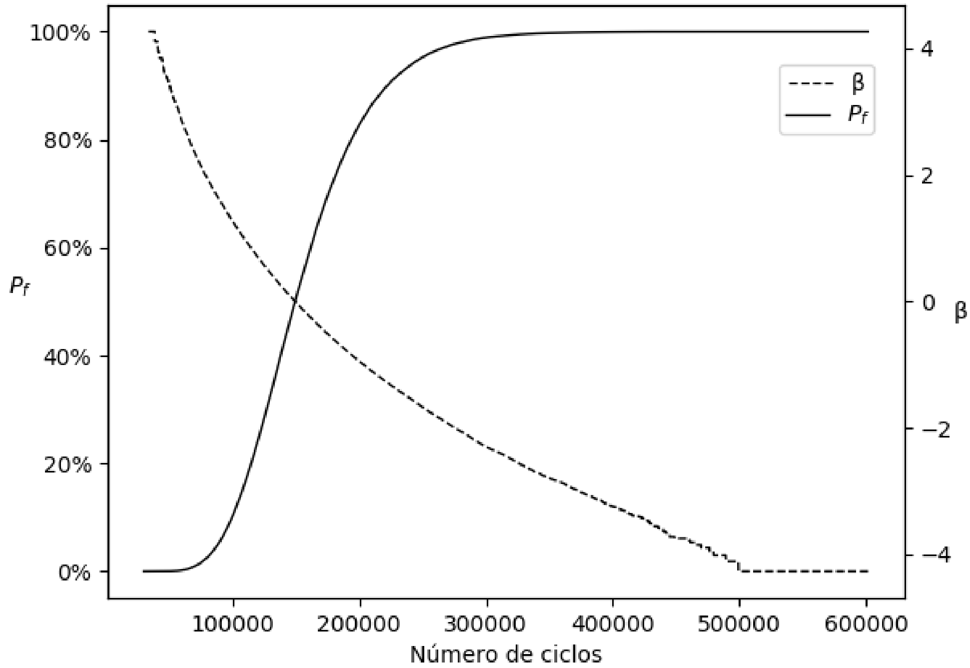


Figura 5.6: Probabilidade de falha e índice β para g_1 (associada à iniciação da trinca)

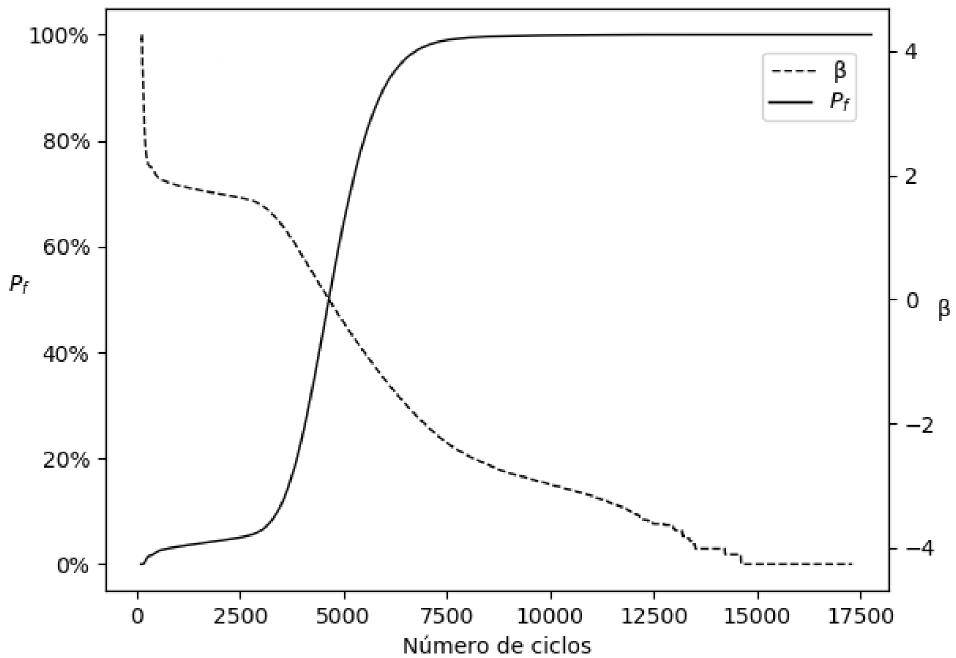


Figura 5.7: Probabilidade de falha e índice β para g_2 (associada à propagação da trinca)

5.3 Discussões

Os dados apresentados nas seções 5.1 e 5.2 indicam que cerca de 98% da vida útil da peça é atribuída à iniciação da trinca. Este resultado está alinhado com os resultados obtidos por WANG *et al.* (1999) e MEIER e GEROLD (1987).

Para avaliar a segurança de uma estrutura, faz-se necessário adotar um índice de confiabilidade, com base em critérios intrínsecos à estrutura em questão. Esses critérios podem ser, por exemplo, a consequência da possível falha e o custo relativo das medidas de segurança. Nesse trabalho, foi adotado o índice de confiabilidade definido no *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2001), igual a 4,2, definido pelo comitê como o valor a ser adotado na maioria das situações. O número de ciclos associado a $\beta = 4,2$ foi chamado de número de ciclos *target*. A Tabela 5.3 apresenta a comparação dos valores *target* e experimentais.

Tabela 5.3: Comparação dos valores numéricos médios, numéricos *target* e experimentais

Valor	N_i	$N_{\overline{p}}$
Numérico, *target*	38.540	130
Numérico, média	156.352	4.595
Experimental	108.000	1.596

As Figuras 5.8 e 5.9 exibem graficamente a comparação entre os valores estimados numerica e experimentalmente, para N_i e $N_{\overline{p}}$, respectivamente.

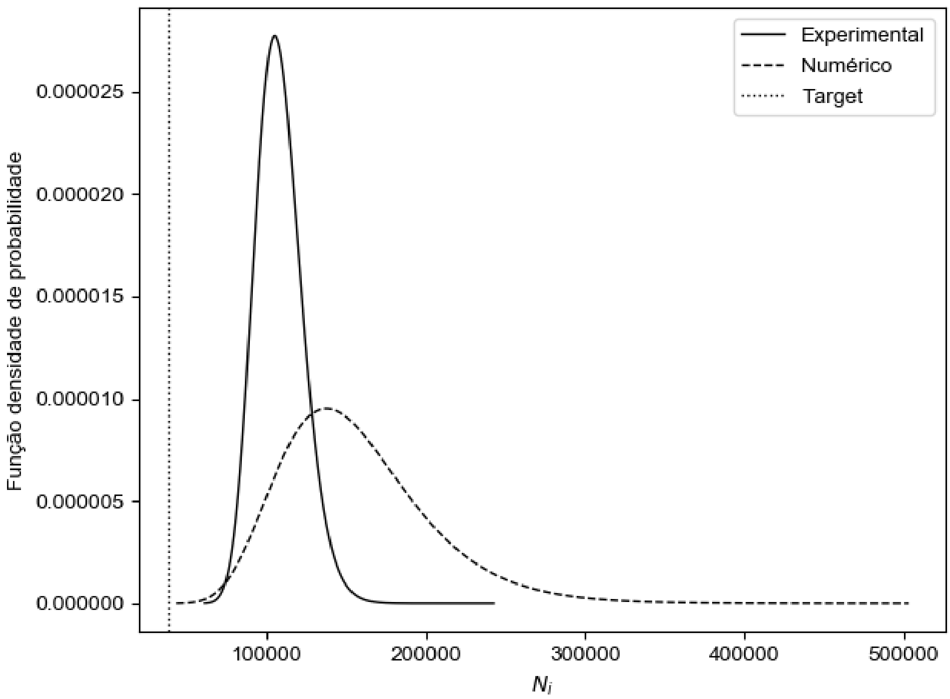


Figura 5.8: Comparação de N_i estimado numericamente e experimentalmente

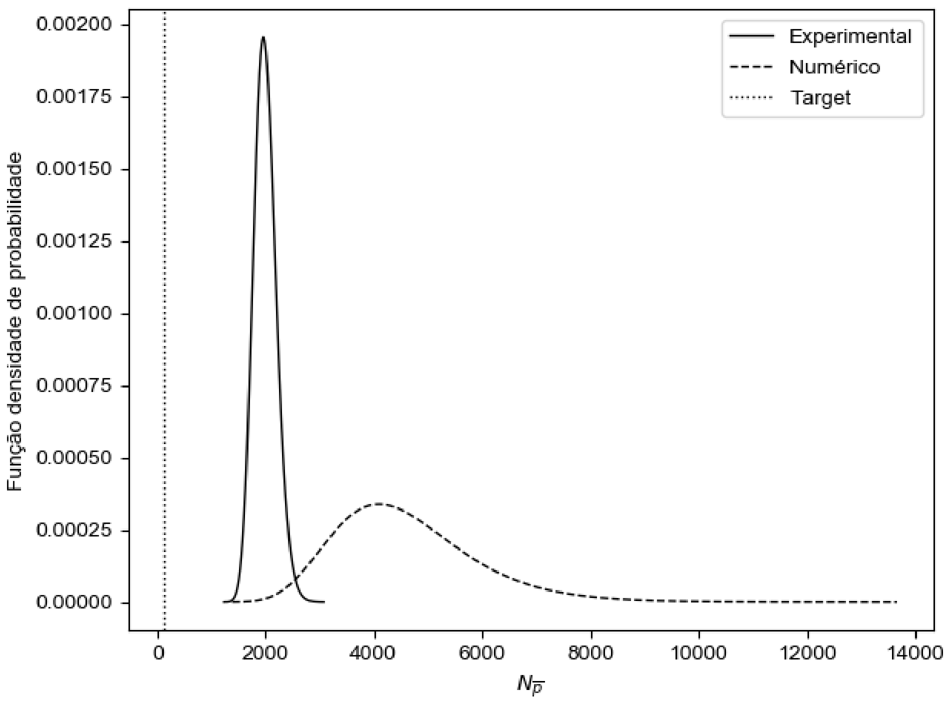


Figura 5.9: Comparação de $N_{\overline{p}}$ estimado numericamente e experimentalmente

Percebe-se que os números de ciclos obtidos experimentalmente não se aproximam dos valores numéricos. Essa diferença pode ser causada pela quantidade de dados de entrada obtidos na literatura e pela própria incerteza associada ao fenômeno de fadiga. Entretanto, os valores experimentais são superiores ao número de ciclos *target*, tanto para o estado limite de iniciação da trinca, quanto para o estado limite de propagação. Dessa forma, a estrutura projetada conforme a análise numérica apresentada no Capítulo 3 apresentaria um grau satisfatório de confiabilidade durante a sua vida útil. Sugere-se que os números de ciclos *target* para que sejam considerados na elaboração do plano de inspeção periódica da estrutura, otimizando dessa forma as inspeções.

Os valores médios apresentados na Tabela 5.3 correspondem aos valores com maior probabilidade de serem obtidos em uma análise tradicional, sem o emprego da teoria de confiabilidade estrutural. Como os valores experimentais são inferiores aos valores médios, uma estrutura projetada segundo a teoria proposta não apresentaria um nível satisfatório de segurança, posto que a estrutura falha antes de atingir o número de ciclos teórico. Sugere-se então a utilização de fatores de segurança para minorar os resultados numéricos. Essa é uma prática muito comum na Engenharia, prevista em diversas normas. A norma API RP 2A (API, 2014) prevê fatores de segurança variando de 2 até 10, com base na criticidade da falha e na possibilidade de inspeção. Para o problema atual, adotando-se um fator de segurança mínimo de 3, obtêm-se os valores apresentados na 5.4.

Tabela 5.4: Comparação dos valores numéricos com aplicação de fator de segurança = 3,0 e experimentais

Valor	N_i	$N_{\overline{p}}$
Numérico, minorado	52.117	1.531
Experimental	108.000	1.596

Com a aplicação do fator de segurança, os valores teóricos se encontram abaixo dos obtidos experimentalmente, indicando assim um nível de segurança satisfatório da estrutura. Entretanto, é importante destacar que a aplicação de fatores de segurança demanda uma análise detalhada desses fatores. Essa análise não fez parte do escopo do presente trabalho.

Capítulo 6

Conclusão

As falhas por fadiga ocorrem em componentes estruturais submetidos a carregamentos cíclicos após um determinado número de ciclos de carregamento. Esse número de ciclos compreende dois períodos distintos: um período associado à nucleação de uma trinca e um segundo período necessário para propagação desta até a falha. Neste trabalho, estudou-se as teorias de Paris e Wöhler, duas metodologias consagradas na literatura para estimativa da vida à fadiga.

Foi proposto um modelo numérico para a estimativa do número de ciclos necessário para iniciação da trinca, utilizando as teorias supracitadas. O modelo foi aplicado a dois estudos de caso. Modelos computacionais em elementos finitos foram utilizados para estimativa do fator de concentração de tensões, K_t, e para ajuste do fator de forma da curva de propagação da trinca, $f(a/W)$ para a geometria em questão. Curvas S-N e $da/dN \times \Delta K$ presentes na literatura foram adotadas e conceitos de confiabilidade estrutural foram utilizados, dado que alguns dos parâmetros do modelo apresentam incertezas. Um código *Python* foi elaborado para a avaliação dos resultados do modelo numérico.

Experimentos foram realizados a fim de verificar a validade do modelo proposto. Corpos de prova de geometria e condições de contorno simples foram submetidos a carregamento cíclico de amplitude constante e instrumentados pelo método do *compliance*. O objetivo dos experimentos era a estimativa dos números de ciclos associados às fases de nucleação e propagação.

Obteve-se experimentalmente ciclos de carregamento superiores aos obtidos pela análise de confiabilidade estrutural, indicando que o modelo proposto apresenta resultados apropriados.

Todavia, trata-se de um modelo inicial, no qual as análises numéricas e experimentais foram realizadas em condições simplificadas. Tais condições configuram limitações na metodologia proposta. Foram empregados:

- Material composto apenas por metal base, sem aplicação de processos de soldagem ou tratamento térmico;
- Carregamento de amplitude constante;
- Razão de tensão de forma a obter tensões de tração em todo o ciclo de carregamento.

Sugere-se para trabalhos futuros a generalização do modelo proposto, para aplicação a estruturas soldadas, avaliando a influência dos diferentes processos de soldagem; considerando carregamentos de amplitude variável e que incluam tensões de tração. O estudo de propagação de microtrincas também pode ser avaliada e incorporada à modelagem. Nessas condições, que envolvem um número significativo de variáveis, recomenda-se a obtenção experimental das curvas S-N e $da/dN \times \Delta K$ para o material e a geometria em questão.

Referências

AASHTO, 1996, *Standard specifications for highway bridges.* Relatório técnico, AASHTO, Washington.

ABS, 2010a, *Rules for building and classing steel vessels.* Relatório técnico, ABS, Houston, a.

ABS, 2010b, *Guide for fatigue assessment of offshore structures.* Relatório técnico, Houston, b.

ALBERT, W., 1838, “Über treibseile am harz”, *Archive für Mineralogie Geognosie Bergbau und Hüttenkund*, v. 10, pp. 215–234.

ANDERSON, T., 2005, *Fracture mechanics - Fundamentals and applications.* 3 ed. College Station, CRC.

ANSYS INC. “Release 19.1. Workbench User’s Guide.” Disponível em: <https://bit.ly/33kkQ2W>. Acesso em: 10 novembro 2018.

API, 2014, *API Recommended Practice 2A-WSD - Planning, Designing, and Constructing Fixed Offshore Platforms—Working Stress Design.* Relatório técnico, API, Washington.

ASTM, 2014, *Standard specification for carbon structural steel.* Relatório Técnico A36/A36M, West Conshohocken.

ASTM, 2018, *Standard test mehod for measurement of fracture toughness.* Relatório Técnico E1820, ASTM, West Conshohocken.

ASTM, 2013, *Standard terminology relating to fatigue and fracture testing.* Relatório Técnico E1823, ASTM, West Conshohocken.

ASTM, 2015, *Standard test method for measurement of fatigue crack growth rates.* Relatório Técnico E647, ASTM, West Conshohocken.

BAI, Y., BAI, Q., 2005, “Steel Tube Umbilical & Control Systems”. In: *Subsea Pipelines and Risers*, Elsevier, pp. 477–496.

BARSOM, J., 1971, “Fatigue-Crack Propagation in Steels of Various Yield Strengths”, *Journal of Engineering for Industry*, v. 93, n. 4, pp. 1190.

BARSOM, J., ROLFE, S., 1999, *Fracture and fatigue control in Structures: Applications of fracture mechanics.* 3 ed. West Conshohocken, ASTM.

BARSOUM, R., 1975, “Further application of quadratic isoparametric elements to linear fracture mechanics of plate bending and general shells”, *International Journal of Fracture*, v. 11, pp. 167–169.

BASQUIN, O., 1910, “The exponential law of endurance tests”, *Proceedings of ASTM*, v. 10.

BATALHA, A., 2009, *Análise de Fadiga de Estruturas Offshore Tipo Topside.* Rio de Janeiro, Dissertação de Mestrado, COPPE, UFRJ.

BECK, A., 2010, *Curso de Confiabilidade Estrutural.* São Carlos, Universidade de São Paulo. Apostila do curso de Engenharia.

BOWER, A., 2009, *Applied mechanics of solids.* Boca Raton, CRC Press.

BRANCO, C., FERNANDES, A., CASTRO, P., 1986, *Fadiga de Estruturas Soldadas.* Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

BSI, 2014, *BS 7608 - Guide to fatigue design and assessment of steel products.* Relatório técnico, London.

BSI, 2013, *BS 7910 - Guide on methods for assessing the acceptability of flaws in fusion welded structures.* Relatório técnico.

CAMSTUDIO, 2019. “CamStudio - Free Screen Recording Software”. Disponível em: <https://camstudio.org/>. Acesso em: 07 agosto 2019.

CBCA, 2014. “Construção em aço | Aços estruturais”. Disponível em: <http://www.cbca-acobrasil.org.br/site/construcao-em-aco-acos-estruturais.php>. Acesso em: 07 agosto 2019.

CHAN, S., TUBA, I., WILSON, W., 1970, “On the finite element method in linear fracture mechanics”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 2, pp. 1–17.

CHEN, N., WANG, G., SOARES, C., 2011, “Palmgren–Miner’s rule and fracture mechanics-based inspection planning”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 78, n. 18, pp. 3166–3182.

CNE, 2005, *EN 1993-1-9 - Eurocode 3: Design of steel structures.* Relatório técnico, Brussels.

COLLINS, J., BUSBY, H., STAAB, G., 2009, *Mechanical Design of Machine Elements and Machines: A Failure Prevention Perspective.* John Wiley & Sons.

CONLE, F., 2014. "Crack Initiation and Propagation Simulation of Variable Amplitude Load Fatigue: Case Study 5". Disponível em: <http://fde.uwaterloo.ca/Fde/Crackgrowth/Case5/case5_HeulerSeeger.html>. Acesso em: 15 julho 2019.

COOK, R., 1994, *Finite element modeling for stress analysis.* 1 ed. Madison, John Wiley and Sons.

CORBANI, S., 2012, *Propagação de frentes de trincas parcialmente fechadas por flexão cíclica.* Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, PUC-Rio.

CORNELL FRACTURE GROUP, 2016. "Software | Cornell Fracture Group". Disponível em: <http://cfg.cornell.edu/software/>. Acesso em: 03 agosto 2019.

DIETER, G., 1981, *Metalurgia Mecânica.* 2 ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois. Tradução de Antonio Silva, Luiz Almeida e Paulo de Miranda.

DNV, 2012, *Fatigue design of offshore steel structures.* Relatório Técnico RP C203, DNV, Høvik.

DOWLING, N., 2013, *Mechanical behavior of materials: Engineering methods for deformation, fracture and fatigue.* 4 ed. Harlow, Pearson.

FERREIRA, A., 2000, *Mini Aurélio Século XXI Escolar.* 4 ed. Rio de Janeiro, Nova Fronteira SA.

FERREIRA, C., 2013. "Caso 031: Fratura por fadiga em tubo SG (1991)". Inspeção de Equipamento: Estudo de Casos. Disponível em: <http://inspecaoequipto.blogspot.com.br/2013/08/caso-031-fratura-por-fadiga-em-tubo-sg.html>. Acesso em: 04 junho 2017.

FORTH, S., EVERETT, R., NEWMAN, J., 2002, "A novel approach to rotorcraft damage tolerance", .

GERBER, W., 1874, "Bestimmung der zulässigen Spannungen in Eisen-Constructionen", *Z Bayer Archit Ing Ver*, v. 6, pp. 101–110.

GOODMAN, J., 1899, *Mechanics Applied to Engineering.* Londres, Longman, Green & Company.

GRIFFITH, A., 1921, “The phenomena of rupture and flow in solids”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 221, pp. 163–198.

GROOTEMAN, F., 2008, “A stochastic approach to determine lifetimes and inspection schemes for aircraft components”, *International Journal of Fatigue*, v. 30, pp. 138–149.

GUIZZARDI, R., 2010. “Quadratura de Gauss-Legendre”. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/ rguizzardi/an/aulas/AulaAcesso em: 18 março 2017.

GURNEY, T., 2006, *Cumulative Damage of Welded Joint*. Sawston, Woodhead Publishing.

HARKNESS, H., BELYSCHKO, T., LIU, W., 1992, “Finite element reliability analysis of fatigue life”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 133, pp. 209–224.

HASHEMI, B., MALJAARS, J., LEONETTI, D., et al., 2017, “Compatibility of S-N and crack growth curves in the fatigue reliability assessment of a welded steel joint”, *Procedia Structural Integrity*, v. 5, pp. 959–966.

HENSHELL, R., SHAW, K., 1975, “Crack tip finite elements are unnecessary”, *Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, pp. 495–507.

HODHIGERE, Y., JHA, J., TEWARI, A., et al., 2017, “Finite Element Analysis-Based Approach for Stress Concentration Factor Calculation”. In: *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, Springer Singapore, pp. 1–6.

HSE, 1998, *OTH 511 - A review of fatigue crack growth rates in air and seawater*. Relatório técnico, Cranleigh.

HUDAK, J., MCCLUNG, R., BARTLETT, M., 1990, “A comparison of single-cycle versus multiple-cycle proof testing strategies”, .

HUSSAIN, K., 1997, “Short fatigue crack behaviour and analytical models: A review”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 58, n. 4, pp. 327–354.

INGLIS, C., 1993, “Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners”, *Transactions ofthe Institute of Naval Architects*, v. 55, pp. 219—-241.

INSTRON, 2019. “ElectroPuls™ E3000 | E3000 All-Electric Dynamic Test Instrument”. Disponível em: <https://www.instron.com.br/-/media/literature-library/products/2019/07/e3000-combined-pod.pdf>. Acesso em: 07 agosto 2019.

INSTRON, 2005. "Instron Da/DN Software For FastTrack 8800 and 8500 PLUS (v37) Controllers - Instron". Disponível em: <https://www.instron.com.br/pt-br/products/materials-testing-software/fasttrack/2490-906>. Acesso em: 20 agosto 2019.

IRWIN, G., 1957, "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, v. 24, pp. 361–364.

IRWIN, G., 1961, "Plastic zone near a crack and fracture toughness". Proceedings of the 1960 Sagamore Ordnance Materials Research Conference, pp. 63–78, Syracuse. Syracuse University Research Institute.

IRWIN, G., 1948, "Fracture dynamics". In: *Fracturing of metals*, ASM Publications, pp. 147–166, Cleveland.

JANBU, A., 2005. "DNV GL guidance on inspection planning of offshore structures will save operational costs". Disponível em: <https://www.dnvgl.com/news/dnv-gl-guidance-on-inspection-planning-of-offshore-structures-will-save-operational-costs-47161>. Acesso em: 25 setembro 2019.

JANSSEN, M., ZUIDEMA, J., WANHILL, R., 2002, *Fracture mechanics*. 2 ed. The Netherlands, VSSD.

JCSS, 2001, *Probabilistic Model Code - Part II - Basis of Design*. Relatório técnico, Joint Committee on Structural Safety Continuing.

KUNKLER, B., DUBER, O., KOSTER, P., et al., 2008, "Modelling of short crack propagation – Transition from stage I to stage II", *Engineering Fracture Mechanics*, v. 75, n. 3-4 (feb.), pp. 715–725.

LAIRD, C., 1967, "The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation". In: *Special Technical Publication 415 - Fatigue Crack Propagation*, ASTM, pp. 131–167, Philadelphia.

LIU, Y., MAHADEVAN, S., 2009, "Probabilistic fatigue life prediction using an equivalent initial flaw size distribution", *International Journal of Fatigue*, v. 31, n. 3, pp. 476–487.

LUKÁŠ, P., 1996, "Fatigue Crack Nucleation and Microstructure". In: *Fatigue and Fracture*, ASM International, pp. 96–109.

MEIER, B., GEROLD, V., 1987, "Proceedings of the 3rd International Conference on Fatigue and Fatigue Thresholds". Lecture Notes in Computer Science, Charlottesville. Engineering Materials Advisory Services Ltd.

MERATI, A., EASTAUGH, G., 2007, "Determination of fatigue related discontinuity state of 7000 series of aerospace aluminum alloys", *Engineering Failure Analysis*, v. 14, n. 4, pp. 673–685.

MITUTOYO, 2019. "Traçadores de Altura". Disponível em: <https://www.mitutoyo.com.br/download/catalogogeral/p2019/18%5Ftracadores.pdf>. Acesso em: 05 agosto 2019.

MOŽE, P., 2015. "ESDEP Course WG 12: Fatigue". Disponível em: <http://www.fgg.uni-lj.si/ /pmoze/ESDEP/master/wg12/toc.htm>. Acesso em: 27 março 2015.

MOHAMMADZADEH, S., SHARAVI, M., KESHAVARZIAN, H., 2013, "Reliability analysis of fatigue crack initiation of railhead in bolted rail joint", *Engineering Failure Analysis*, v. 29, pp. 132–148.

NOVOZHILOV, V., 1969, "On a necessary and sufficient criterion for brittle strength", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 33, n. 2, pp. 201–210.

OROWAN, E., 1948, "Fracture and strength of solids", *Reports on Progress in Physics*, v. 12, pp. 185–232.

PARIS, P., BUCCI, R., WESSEL, E., et al., 1972, "Extensive study of low fatigue crack growth rates in A533 and A508 steels". Stress Analysis and Growth of Cracks, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part I, pp. 141–176, West Conshohocken. ASTM.

PARIS, P., ERDOGAN, F., 1960, "A critical analysis of crack propagation laws", *Journal of Basic Engineering*, v. 85, pp. 528–534.

PARIS, P., GOMEZ, M., ANDERSON, W., 1961, "A rational analytic theory of fatigue", *The Trend in Engineering*, v. 13, pp. 9–14.

PARTHEYMÜLLER, P., 1999, "Numerische simulation der 3D-Rißausbreitung mit der randelementmethode", *Fortschritt-Berichte VDI Reihe*, v. 242.

PONCELET, J., 1839, *Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale*. Paris, Mme. Thiel.

POOK, L., 1972, "Fatigue Crack Growth Data for Various Materials Deduced from the Fatigue Lives of Precracked Plates". Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part 1, ASTM STP 513, pp. 106–124, Urbana. ASTM.

PUGNO, M., RUOFF, R., 2004, “Quantized fracture mechanics”, *Philosophical Magazine*, v. 84, n. 27, pp. 2829–2845.

PUGNO, N., CORNETTI, P., CARPINTERI, A., 2007, “New unified laws in fatigue: From the Wohler’s to the Paris’ regime”, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 74, n. 4, pp. 595–601.

PULIDO, J., JACOBS, T., PRATES DE LIMA, E., 1992, “Structural reliability using Monte carlo simulation with variance reduction techniques on elastic-plastic structures”, *Computer and Structures*, pp. 419–430.

PYTHON SOFTWARE FOUNDATION, 2019. “Welcome to Python.org”. Disponível em: <https://www.python.org/>. Acesso em: 12 setembro 2019.

PYTTEL, B., SCHWERDT, D., BERGER, C., 2011, “Very high cycle fatigue – Is there a fatigue limit?” *International Journal of Fatigue*, v. 33, n. 1, pp. 49–58.

RANKINE, W., 1843, “On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles”, *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineersd*, pp. 105–108.

REED, R., SMITH, J., CHRIST, B., 1983, *The economic effects of fracture in the united states: Part I.* Relatório técnico, National Bureau of Standards, Washington.

ROSA, W., 2010. “Cálculo Numérico: Quadratura de Gauss-Legendre”. Disponível em: <http://www.profwillian.com/calcnum/Legendre.htm>. Acesso em: 18 março 2017.

SCHIJVE, J., 2008, *Fatigue of Structures and Materials.* Springer Netherlands.

SODERBERG, C., 1930, “Factor of safety and working stress”, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, v. 52, pp. 13–28.

SURESH, S., RITCHIE, R., 1984, “Propagation of short fatigue cracks”, *International Metals Reviews*, v. 29, n. 1 (jan.), pp. 445–475.

SWEDLOW, J., WILLIAMS, M., YANG, W., 1965, “Elasto plastic stresses and strains in cracked plate”. Proceedings of the First International Conference on Fracture, pp. 259–282, Sendai.

ÁVILA, G., PALMA, E., DE PAULA, R., 2017, "Crane girder fatigue life determination using SN and LEFM methods", *Engineering Failure Analysis*, v. 79, pp. 812–819.

WANG, Q., BERARD, J., RATHERY, S., et al., 1999, "High-cycle fatigue crack initiation and propagation behaviour of high-strength sprin steel wires", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, v. 22, n. 8, pp. 673–677.

WANG, X., CRUPI, V., GUO, X., et al., 2010, "Quantitative Thermographic Methodology for fatigue assessment and stress measurement", *International Journal of Fatigue*, v. 32, n. 12 (dec.), pp. 1970–1976.

WESTERGAARD, H., 1939, "Bearing pressures and cracks", *Journal of Applied Mechanics*, v. 6, pp. A49–53.

WÖHLER, A., 1860, "Versuche uber die festigkeit der Eisenbahnwagenachsen", *Zeitschrift fur Bauwesen*, v. 10.

WU, J., CHEN, N.-Z., 2017, "Fracture Mechanics Based Fatigue Assessment for a Spar-Type Floating Wind Turbine". In: *Volume 10: Ocean Renewable Energy*. American Society of Mechanical Engineers.

YOUNG, W., BUDYNAS, R., SADEGH, A., 2011, *Roark's Formulas for Stress and Strain*. Singapura, McGraw-Hill Professional Publishing.

ZAFOŠNIK, B., FAJDIGA, G., 2016, "Determining stress intensity factor KI with extrapolation method", *Technical Gazette*, v. 23 (6), pp. 1673–1678.

Apêndice A

Código em *Python* para análise de confiabilidade estrutural

A execução do código abaixo tem os seguintes pré-requisitos:

- Python v.3.6.6
- Matplotlib v.3.1.1
- Numpy v.1.17.0
- Scipy v.1.3.1
- Unidecode v.1.0.22

Para executá-lo, copie todos os arquivos para um mesmo diretório, abra o terminal e rode o seguinte comando:

Python {caminho}crack_growth.py

sendo {caminho} o diretório onde se encontram os arquivos, exemplo "*C:/Usuarios/Ana/Confiabilidade/*".

A.1 analysis_utils.py

```
import numpy
import math

class AnalysisUtils():
    def __init__(self,number_of_samples,number_of_threads):
        if not (number_of_samples/number_of_threads).
            is_integer():
            raise ValueError('The ratio sample size/number
                of threads must be an integer.')
```

```
        self._number_of_samples=number_of_samples
        self._number_of_threads=number_of_threads

    @property
    def number_of_threads(self):
        return  self._number_of_threads

    @property
    def number_of_samples(self):
        return  self._number_of_samples

    def lognormal_array(self,random_variable):
        mu, sigma = self._lognormal_parameters(
           random_variable.mean, random_variable.
           standard_deviation)
        samples=numpy.random.lognormal(mu, sigma, self.
           _number_of_samples)
        return samples

    def _lognormal_parameters(self, mean, standard_deviation
       ):
        variance=(standard_deviation)**2
        mu = math.log((mean**2)/math.sqrt(variance+mean**2))
        sigma = math.sqrt(math.log(variance/(mean**2)+1))
        return mu, sigma
```

A.2 crack_growth.py

```
from geometry import *
from wohler_curve import *
from material import *
from paris_curve import *
from load import *
from analysis_utils import *
from reliability_analysis import *
from random_variable import *

import math
import numpy
import threading
import queue
import time
import os

class CrackGrowth():

    def __init__(self,analysis_utils,geometry,material,load)
       :
        progress=0
        sn_curve_log_a_distribution_MPa,
           sn_curve_m_distribution_MPa,
```

```
            ultimate_strenght_distribution_MPa,
            fracture_toughness_distribution_MPam,
            paris_curve_c_distribution_MPam,
            paris_curve_m_distribution_MPam,
            critical_crack_distribution_mm,
            maximum_load_distribution_N,
            initial_crack_distribution_mm = self.
            initialize_statistic_properties(material,geometry
            ,load,analysis_utils)

        self._initiation_queue = queue.Queue()
        self._propagation_until_failure_queue= queue.Queue()
        self._propagation_until_final_crack_queue= queue.
            Queue()
        self._total_queue= queue.Queue()
        threads = []

        for i in range(analysis_utils.number_of_threads):
            sample_size=analysis_utils.number_of_samples/
                analysis_utils.number_of_threads
            initial_sample_value=int(i*sample_size)
            final_sample_value=int((i+1)*sample_size)
            t = threading.Thread(target=self.
                crack_propagation_until_failure, \
                args=(initial_sample_value,
                    final_sample_value,
                    maximum_load_distribution_N, geometry,
                    load.load_ratio,
                sn_curve_log_a_distribution_MPa,
                    sn_curve_m_distribution_MPa,
                    ultimate_strenght_distribution_MPa,
                initial_crack_distribution_mm,
                    fracture_toughness_distribution_MPam,
                    paris_curve_c_distribution_MPam,
                    paris_curve_m_distribution_MPam,
                    critical_crack_distribution_mm))
            progress=self.increment_progress(progress,
                analysis_utils.number_of_threads)
            t.start()
            threads.append(t)

        for t in threads:
            progress=self.increment_progress(progress,
                analysis_utils.number_of_threads)
            t.join()

        if (self._initiation_queue.empty() or self.
            _propagation_until_failure_queue.empty() or self.
            _total_queue.empty()):
            raise ValueError('Cycle arrays are empty.')
        else:
```

```
            self.process_results()

    def process_results(self):
        self._initiation_number_of_cycles=numpy.array(self._initiation_queue.queue)
        self._propagation_until_failure_number_of_cycles=numpy.array(self._propagation_until_failure_queue.queue)
        self._total_number_of_cycles=numpy.array(self._total_queue.queue)
        self._propagation_until_final_crack_number_cycles=numpy.array(self._propagation_until_final_crack_queue.queue)

        numpy.savetxt('output//initiation_number_cycles.csv', self._initiation_number_of_cycles, delimiter=',')
        numpy.savetxt('output//propagation_until_failure_number_cycles.csv', self._propagation_until_failure_number_of_cycles, delimiter=',')
        numpy.savetxt('output//total_number_cycles.csv', self._total_number_of_cycles, delimiter=',')
        numpy.savetxt('output//propagation_until_final_crack_number_cycles.csv', self._propagation_until_final_crack_number_cycles, delimiter=',')

        print('Mean Ni:',int(numpy.mean(self._initiation_number_of_cycles)))
        print('STD Ni:',int(numpy.std(self._initiation_number_of_cycles)))
        print('Mean Np:',int(numpy.mean(self._propagation_until_failure_number_of_cycles)))
        print('STD Np:',int(numpy.std(self._propagation_until_failure_number_of_cycles)))
        print('Mean N\u1E57:',int(numpy.mean(self._propagation_until_final_crack_number_cycles)))
        print('STD N\u1E57:',int(numpy.std(self._propagation_until_final_crack_number_cycles)))
        print('Mean Nt:',int(numpy.mean(self._total_number_of_cycles)))
        print('STD Nt:',int(numpy.std(self._total_number_of_cycles)))

    @property
    def initiation_number_of_cycles(self):
        return self._initiation_number_of_cycles

    @property
```

```
    def  propagation_until_failure_number_of_cycles(self):
        return self._propagation_until_failure_number_of_cycles

    @property
    def  total_number_of_cycles(self):
        return self._total_number_of_cycles

    @property
    def  propagation_until_final_crack_number_cycles(self):
        return self._propagation_until_final_crack_number_cycles


    def increment_progress(self,old_progress, number_of_threads):
        progress=old_progress+1
        percentage=int(progress/(2*number_of_threads)*100)
        end_string= "\r" if percentage<100 else "\n"
        print('Crack growth propagation progress '+str(percentage)+'%', end=end_string)
        return progress

    def crack_propagation_until_failure(self, initial_sample_value,final_sample_value, maximum_load_distribution_N, geometry, load_ratio,
        sn_curve_log_a_distribution_MPa, sn_curve_m_distribution_MPa, ultimate_strenght_distribution_MPa,
        initial_crack_distribution_mm, fracture_toughness_distribution_MPam, paris_curve_c_distribution_MPam, paris_curve_m_distribution_MPam, critical_crack_distribution_mm):

        for i in range(initial_sample_value, final_sample_value):
            j=0
            total_number_of_cycles=0.0
            propagation_number_of_cycles=0.0
            propagation_until_final_crack=0.0
            initiation_number_of_cycles=0.0
            maximum_nominal_stress_MPa= maximum_load_distribution_N[i]/geometry.area_mm2+(maximum_load_distribution_N[i]*geometry.excentricity_mm)/geometry.static_moment_mm3

            minimum_nominal_stress_MPa= maximum_nominal_stress_MPa*load_ratio

```

```
            total_number_of_cycles=WohlerCurve(sn_curve_log_a_distribution_MPa[i],sn_curve_m_distribution_MPa[i]).number_of_cycles(maximum_nominal_stress_MPa,minimum_nominal_stress_MPa,geometry.stress_concentration_factor,ultimate_strenght_distribution_MPa[i])

            geometry.start_crack(initial_crack_distribution_mm[i])
            maximum_stress_intensity_factor_MPam=0

            while (maximum_stress_intensity_factor_MPam < fracture_toughness_distribution_MPam[i]):
                geometry_factor = geometry.calculate_geometry_factor()
                maximum_stress_intensity_factor_MPam = geometry_factor * maximum_load_distribution_N[i]/geometry.thickness_mm* \
                  math.sqrt(math.pi/geometry.width_mm)
                delta_stress_intensity_factor_MPam = (1-load_ratio)*maximum_stress_intensity_factor_MPam
                geometry.grow_crack()
                number_of_cycles=ParisCurve(paris_curve_c_distribution_MPam[i],paris_curve_m_distribution_MPam[i]) \
                  .number_of_cycles(delta_stress_intensity_factor_MPam,geometry.crack_increment_mm)
                propagation_number_of_cycles = propagation_number_of_cycles+number_of_cycles
                if geometry.actual_crack_mm<critical_crack_distribution_mm[i]:
                  propagation_until_final_crack=propagation_until_final_crack+number_of_cycles
            j=j+1

            initiation_number_of_cycles = total_number_of_cycles-propagation_number_of_cycles
            if initiation_number_of_cycles>0 and propagation_until_final_crack>0:
                self._initiation_queue.put(initiation_number_of_cycles)
                self._propagation_until_failure_queue.put(propagation_number_of_cycles)
```

```
                self._total_queue.put(total_number_of_cycles)
                self._propagation_until_final_crack_queue.put(propagation_until_final_crack)

    def initialize_statistic_properties(self, material, geometry,load,analysis_utils):
        print('Initializing material statistic properties')
        sn_curve_log_a_distribution_MPa=analysis_utils.lognormal_array(material.wohler_curve.log_a_MPa)
        sn_curve_m_distribution_MPa=analysis_utils.lognormal_array(material.wohler_curve.m_MPa)
        paris_curve_c_distribution_MPam=analysis_utils.lognormal_array(material.paris_curve.C_MPam)
        paris_curve_m_distribution_MPam=analysis_utils.lognormal_array(material.paris_curve.m_MPam)
        fracture_toughness_distribution_MPam = analysis_utils.lognormal_array(material.fracture_toughness_MPam)
        ultimate_strenght_distribution_MPa = analysis_utils.lognormal_array(material.ultimate_strenght_MPa)
        maximum_load_distribution_N= analysis_utils.lognormal_array(load.maximum_load_N)
        initial_distribution_crack_mm= analysis_utils.lognormal_array(geometry.initial_crack_mm)
        critical_crack_distribution_mm= analysis_utils.lognormal_array(geometry.critical_crack_mm)

        return sn_curve_log_a_distribution_MPa, sn_curve_m_distribution_MPa, ultimate_strenght_distribution_MPa, fracture_toughness_distribution_MPam, paris_curve_c_distribution_MPam, paris_curve_m_distribution_MPam, critical_crack_distribution_mm, maximum_load_distribution_N, initial_distribution_crack_mm



if not os.path.exists('output'):
    os.makedirs('output')
start = time.time()

geometry=Geometry(width_mm=30, \
                thickness_mm=3, \
                notch_size_mm=15, \
                stress_concentration_factor=3.8, \
                initial_crack_mm=RandomVariable(mean=15+0.5, standard_deviation=0.1), \
```

```
                    critical_crack_mm=RandomVariable(mean=15+3.7,standard_deviation=0.3), \
                    crack_increment_mm=0.1, \
                    geometry_factor_coefficients=[202.08,-510.72,486.32,-205.49,32.56])

material=Material(ultimate_strenght_MPa=RandomVariable(mean=500,standard_deviation=5), \
                    fracture_toughness_MPam=RandomVariable(mean=100,standard_deviation=5), \
                    sn_curve_log_a_MPa=RandomVariable(mean=22.60,standard_deviation=0.05), \
                    sn_curve_m_MPa=RandomVariable(mean=7.20,standard_deviation=0.05), \
                    paris_curve_c_MPam=RandomVariable(mean=2.46E-14,standard_deviation=0.05E-14), \
                    paris_curve_m_MPam=RandomVariable(mean=4.78,standard_deviation=0.05))

load=Load(maximum_load_N=RandomVariable(mean=2000,standard_deviation=5), \
               load_ratio=0.1)

analysis_utils=AnalysisUtils(number_of_samples=10**8,number_of_threads=10**6)

crack_growth_results=CrackGrowth(analysis_utils,geometry,material,load)

ReliabilityAnalysis(limit_state_name='Inicia\u00E7\u00E3o', \
                         array_values=crack_growth_results.initiation_number_of_cycles, \
                         step_value=10) \
                         .MonteCarloMethod()

ReliabilityAnalysis(limit_state_name='Propaga\u00E7\u00E3o', \
                         array_values=crack_growth_results.propagation_until_final_crack_number_cycles, \
                         step_value=10) \
                         .MonteCarloMethod()

end=time.time()

print('All tasks finished in', str(round(end-start,1)),' seconds.')
```

A.3 geometry.py

```python
import numpy
class Geometry():

    def __init__(self,width_mm,thickness_mm,notch_size_mm,
       stress_concentration_factor,initial_crack_mm,
       critical_crack_mm,crack_increment_mm,
       geometry_factor_coefficients):
        self._width_mm = width_mm
        self._thickness_mm = thickness_mm
        self._notch_size_mm=notch_size_mm
        self._scf=stress_concentration_factor
        self._initial_crack_mm=initial_crack_mm
        self._crack_increment_mm=crack_increment_mm
        self._critical_crack_mm=critical_crack_mm
        self._geometry_factor_coefficients=
           geometry_factor_coefficients


    @property
    def thickness_mm(self):
        return self._thickness_mm

    @property
    def width_mm(self):
        return self._width_mm

    @property
    def initial_crack_mm(self):
        return self._initial_crack_mm

    @property
    def notch_size_mm(self):
        return self._notch_size_mm

    @property
    def stress_concentration_factor(self):
        return self._scf

    @property
    def crack_increment_mm(self):
        return self._crack_increment_mm

    @property
    def critical_crack_mm(self):
        return self._critical_crack_mm

    @property
    def area_mm2(self):
        return self._thickness_mm*self._width_mm

    @property
```

```
    def static_moment_mm3(self):
        return (self._thickness_mm*self._width_mm**2)/6

    @property
    def excentricity_mm(self):
        return self._width_mm/2

    @property
    def actual_crack_mm(self):
        return self._actual_crack_mm

    def calculate_geometry_factor(self):
        polynom=numpy.poly1d(self._geometry_factor_coefficients)
        crack_lenght_width_factor=self._actual_crack_mm/self._width_mm
        return polynom(crack_lenght_width_factor)

    def start_crack(self,crack_lenght):
        self._actual_crack_mm=crack_lenght

    def grow_crack(self):
        self._actual_crack_mm+=self._crack_increment_mm
```

A.4 load.py

```
class Load():

    def __init__(self,maximum_load_N,load_ratio):
        self._maximum_load_N=maximum_load_N
        self._load_ratio=load_ratio

    @property
    def load_ratio(self):
        return self._load_ratio

    @property
    def maximum_load_N(self):
        return self._maximum_load_N

    @property
    def minimum_load_N(self):
        return self._load_ratio*self.maximum_load_N
```

A.5 material.py

```
from paris_curve import *
from wohler_curve import *

class Material():
```

```python

    def __init__(self,ultimate_strenght_MPa,fracture_toughness_MPam,sn_curve_log_a_MPa,sn_curve_m_MPa,paris_curve_c_MPam,paris_curve_m_MPam):
        self._ultimate_strenght_MPa=ultimate_strenght_MPa
        self._fracture_toughness_MPam=fracture_toughness_MPam
        self._paris_curve=ParisCurve(paris_curve_c_MPam,paris_curve_m_MPam)
        self._wohler_curve=WohlerCurve(sn_curve_log_a_MPa,sn_curve_m_MPa)

    @property
    def ultimate_strenght_MPa(self):
        return self._ultimate_strenght_MPa

    @property
    def fracture_toughness_MPam(self):
        return self._fracture_toughness_MPam

    @property
    def paris_curve(self):
        return self._paris_curve

    @property
    def wohler_curve(self):
        return self._wohler_curve
```

A.6 paris_curve.py

```python
class ParisCurve():

    def __init__(self,C_MPam,m_MPam):
        self._c_MPam=C_MPam
        self._m_MPam=m_MPam

    @property
    def C_MPam(self):
        return self._c_MPam

    @property
    def m_MPam(self):
        return self._m_MPam

    def number_of_cycles(self,delta_stress_intensity_factor_MPam,crack_increment_mm):
        crack_increment_m=crack_increment_mm/1000
        number_of_cycles=crack_increment_m/(self._c_MPam*delta_stress_intensity_factor_MPam**self._m_MPam)
```

```
            return number_of_cycles
```

A.7 random_variable.py

```
class RandomVariable():
    def __init__(self,mean,standard_deviation):
        self._mean=mean
        self._standard_deviation=standard_deviation

    @property
    def mean(self):
        return self._mean

    @property
    def standard_deviation(self):
        return self._standard_deviation
```

A.8 reliability_analysis.py

```
import scipy.stats
import matplotlib.pyplot
import numpy
from matplotlib.ticker import PercentFormatter
import math
import unidecode
from numba import jit

class ReliabilityAnalysis():
    def __init__(self,limit_state_name,array_values,
        step_value):
        self._limit_state_name=limit_state_name
        self._array_values=array_values
        self._number_of_samples=len(array_values)
        self._step_value=step_value

    def MonteCarloMethod(self):
        print('Starting Monte Carlo Method for ',self.
            _limit_state_name)
        target_number=0
        min_value=min(self._array_values)
        min_goal_number_cycles=self.
            calculate_min_value_for_reliability_loop(
            min_value)
        array = numpy.empty(shape = (0, 3))
        number_of_cycles=min_goal_number_cycles
        probability_of_failure=0
        while probability_of_failure<1:
            t=0
            array_g = self._array_values - number_of_cycles
            less_than_zero=filter(lambda x: x<0,array_g)
```

```
            t=len(list(less_than_zero))
            probability_of_failure=t/self._number_of_samples
            beta_factor=-scipy.stats.norm.ppf(probability_of_failure)
            if target_number==0 and beta_factor<4.2:
                target_number=number_of_cycles
                print('Target :',target_number)
            number_of_cycles=number_of_cycles+self._step_value
            array=numpy.append(array,[[number_of_cycles,probability_of_failure,beta_factor]],axis=0)
        numpy.savetxt('output//'+unidecode.unidecode(str.lower(self._limit_state_name))+'-confiabilidade.csv', array, delimiter=',', header='# of cycles,pf,beta')
        self.reliability_plot(array)

    def calculate_min_value_for_reliability_loop(self,min_value):
        if min_value==0:
            return 0
        else:
            log10=math.log10(min_value)
            magnitude_order=10**math.floor(log10)
            multiply_factor=min_value/magnitude_order
            return math.floor(multiply_factor)*magnitude_order

    def reliability_plot(self,array):
        matplotlib.pyplot.clf()
        fig,axis_pf = matplotlib.pyplot.subplots()
        axis_pf.set_xlabel('N\u00FAmero de ciclos')
        axis_pf.set_ylabel(r'$P_f$', rotation=0)
        axis_pf.yaxis.set_major_formatter(PercentFormatter(xmax=1))
        axis_pf.plot(array[:,0], array[:,1], linewidth=1, linestyle='solid', color='black',label=r'$P_f$')
        matplotlib.pyplot.legend()
        axis_beta = axis_pf.twinx()

        axis_beta.set_ylabel('\u03B2', color='black', rotation=0)
        axis_beta.plot(array[:,0], array[:,2], linewidth=1, linestyle='dashed', color='black',label='\u03B2')
        matplotlib.pyplot.legend()

        matplotlib.pyplot.savefig('output//'+unidecode.unidecode(str.lower(self._limit_state_name))+'-confiabilidade.png')
```

A.9 wohler_curve.py

```python
import math

class WohlerCurve():

    def __init__(self,logA_MPa,m_MPa):
        self._logA_MPa=logA_MPa
        self._m_MPa=m_MPa

    @property
    def log_a_MPa(self):
        return self._logA_MPa

    @property
    def m_MPa(self):
        return self._m_MPa

    def number_of_cycles(self,maximum_nominal_stress_MPa,minimum_nominal_stress_MPa,stress_concentration_factor,
        ultimate_strenght_MPa):
        maximum_hot_spot_stress_MPa=self._hot_spot_stress(maximum_nominal_stress_MPa,stress_concentration_factor)
        minimum_hot_spot_stress_MPa=self._hot_spot_stress(minimum_nominal_stress_MPa,stress_concentration_factor)
        equivalent_variable_stress_MPa=self._equivalent_stress_variation(maximum_hot_spot_stress_MPa,minimum_hot_spot_stress_MPa,
            ultimate_strenght_MPa)
        number_of_cycles=10**(self._logA_MPa-self._m_MPa*math.log10(equivalent_variable_stress_MPa))
        return number_of_cycles

    def _hot_spot_stress(self,nominal_stress,stress_concentration_factor):
        return nominal_stress*stress_concentration_factor

    def _equivalent_stress_variation(self,maximum_stress,minimum_stress,ultimate_strenght):
        #Returns the equivalent stress using Gerber's equation#
        mean_stress=(maximum_stress+minimum_stress)/2
        gerber_factor=1-(mean_stress/ultimate_strenght)**2
        return (maximum_stress-minimum_stress)*gerber_factor
```

Apêndice B

Dados de CMOD obtidos experimentalmente

B.1 CP01

Ciclo	COD min [mm]	COD med [mm]	COD max [mm]
1	0,257956976	0,280120534	0,304999345
16	0,262978071	0,293093127	0,317037099
88193	0,278992647	0,414830080	0,525019158
89469	0,278956884	0,392640701	0,525004852
90415	0,278992647	0,403440169	0,526034821
91047	0,279958242	0,397129324	0,526020516
91741	0,279994005	0,418410042	0,527036179
92184	0,280973905	0,418515435	0,527758587
92199	0,279972547	0,397830811	0,527515400
92421	0,279972547	0,415567329	0,528001774
92435	0,279994005	0,415116361	0,528037537
92744	0,280952448	0,401844612	0,528037537
93011	0,280973905	0,402394787	0,529038895
93693	0,281953806	0,406810704	0,530018795
93707	0,281953806	0,401565770	0,530004490
94132	0,282976621	0,414729157	0,531005848
94147	0,282955164	0,397881559	0,531041611
94593	0,282976621	0,397782281	0,532014358
94610	0,282990926	0,421175185	0,533037174
94625	0,282990926	0,405468598	0,533001411
95027	0,283992284	0,422952559	0,534753788
95114	0,283992284	0,402491239	0,535004127
95305	0,283956522	0,399955586	0,535755146
95350	0,284957880	0,402117124	0,536034096
95365	0,284979337	0,403940204	0,536041248
95409	0,284993642	0,408427146	0,536019791
95497	0,284986490	0,413525632	0,536019791
95512	0,284957880	0,416002062	0,536777962
95722	0,284957880	0,407062689	0,537013996
95768	0,284993642	0,426218453	0,538015354
95886	0,285973543	0,406176344	0,538036812
96003	0,285973543	0,406530145	0,538794983
96048	0,285952085	0,426456347	0,538773525
96224	0,285995000	0,415312412	0,540039528
96238	0,286974901	0,425663522	0,540018070
96460	0,286974901	0,417228082	0,542006481
96491	0,286974901	0,421450630	0,542020786
96521	0,286953443	0,411848930	0,542035091
96550	0,287954801	0,417746749	0,542020786
96565	0,287976259	0,403805664	0,542042244
96611	0,287954801	0,412448207	0,542771805
96940	0,288977617	0,410926893	0,546040523
96955	0,288991922	0,408342210	0,546019066
96984	0,288956159	0,431822088	0,546019066
96999	0,288977617	0,432782712	0,546040523
97014	0,288977617	0,407307878	0,546019066
97043	0,289978975	0,429447153	0,546998966
97087	0,289957517	0,423916617	0,546998966

97147	0,289978975	0,412531677	0,548021782
97162	0,289957517	0,429881027	0,548000324
97190	0,289957517	0,414283767	0,548036087
97395	0,291237825	0,411883405	0,551018703
97439	0,291953081	0,410167828	0,551040161
97469	0,291974538	0,437186112	0,552041519
97527	0,291974538	0,421134165	0,552041519
97557	0,292239183	0,411274257	0,553021419
97572	0,292990201	0,436151853	0,553021419
97602	0,292954439	0,438098958	0,554037082
97719	0,293977254	0,420743528	0,555038440
97735	0,293991559	0,438809707	0,555038440
97750	0,293955797	0,425174787	0,555002677
97764	0,293955797	0,435826411	0,555775154
97927	0,294978612	0,422281292	0,559015262
97986	0,295193189	0,421030453	0,559015262
98016	0,295958513	0,438196518	0,559015262
98045	0,295994275	0,417897132	0,560016620
98178	0,296995633	0,433640769	0,562019336
98194	0,296974176	0,445874252	0,562040794
98238	0,297975534	0,437085977	0,563042152
98342	0,298955434	0,447794928	0,565037715
98356	0,298955434	0,437847223	0,565037715
98519	0,299978250	0,424345377	0,569035995
98533	0,300958150	0,435289719	0,569021690
98564	0,300972455	0,445238175	0,569014537
98711	0,302975171	0,453626945	0,572998511
98725	0,302975171	0,427155259	0,572755324
98740	0,302953714	0,444956293	0,573041427
98754	0,302975171	0,428735259	0,573019969
98860	0,303955072	0,452790274	0,576002585
98891	0,304977887	0,456907715	0,576038348
98905	0,304956430	0,450327756	0,576996791
98920	0,304970735	0,430129328	0,577003943
98935	0,304949277	0,457477452	0,577018249
99113	0,307974809	0,435104075	0,583040702
99142	0,308954709	0,436005762	0,584042060
99156	0,308976167	0,445371070	0,585000502
99172	0,308954709	0,439076819	0,585000502
99203	0,309977525	0,452709737	0,585021960
99218	0,309956067	0,455905714	0,585036265
99365	0,312974446	0,442425182	0,591015803
99379	0,312952989	0,452713277	0,591015803
99411	0,313975804	0,464270522	0,591037261
99574	0,317988389	0,474570598	0,598039614
99588	0,317974084	0,451983394	0,598998057
99603	0,317952626	0,465481879	0,599040972
99617	0,318953984	0,472203423	0,600042330
99632	0,319991105	0,452479603	0,600020873
99662	0,319955342	0,450600304	0,602016436
99676	0,320971005	0,470403446	0,602037894
99691	0,320956700	0,451751044	0,603003489
99721	0,321958058	0,456330075	0,604755865
99735	0,321950906	0,468076541	0,605041968
99780	0,323953622	0,461173822	0,608038889
99795	0,323953622	0,454626658	0,608038889
99825	0,324954980	0,471037342	0,609791266
99840	0,325956338	0,485383154	0,609998690
99870	0,326986306	0,485818924	0,612037169
99915	0,327973359	0,475208105	0,614018427
99931	0,328953259	0,482280983	0,615034090
99946	0,329990380	0,488718285	0,616035448
99962	0,330977433	0,490333618	0,617015348
99976	0,330991738	0,465417435	0,618038164
100094	0,335948460	0,498108805	0,626034723
100122	0,336949818	0,471977009	0,627036081
100137	0,337951176	0,471438600	0,628015981
100153	0,338988297	0,501834715	0,629017339
100183	0,339989655	0,474610759	0,630998598
100228	0,342950814	0,490726723	0,634996877
100257	0,343952172	0,495225896	0,638036714
100273	0,344953530	0,508138872	0,639009462
100304	0,346992008	0,511118306	0,642034994
100332	0,348951809	0,489853467	0,644037710
100362	0,350975983	0,513790108	0,647034631
100393	0,352957241	0,490359761	0,650017247
100407	0,353972904	0,493805326	0,651040063
100437	0,355989925	0,517122234	0,654015527
100451	0,356991283	0,493956710	0,655031190
100481	0,359973900	0,526050163	0,658278451

100495	0,360953800	0,518209422	0,660037980
100553	0,366969101	0,529666818	0,666997418
100598	0,370953075	0,517805768	0,672011361
100658	0,376975528	0,520244611	0,679035172
100688	0,380988113	0,520509792	0,683019146
100703	0,381953708	0,542704642	0,686016068
100732	0,385951988	0,535686732	0,690793976
100747	0,387976161	0,531688667	0,693011269
100777	0,391952983	0,551289678	0,698010906
100793	0,394477836	0,563292634	0,700035080
100822	0,398955337	0,545941532	0,706000313
100838	0,401952258	0,573631834	0,709011539
100867	0,406951896	0,562467515	0,714039787
100911	0,413954249	0,578648817	0,723037704
100954	0,422973624	0,578349590	0,733036979
101001	0,432972899	0,575880348	0,744016154
101045	0,442972174	0,598674475	0,756039603
101059	0,446970453	0,615011452	0,760016425
101090	0,453951349	0,627205740	0,768005831
101105	0,457971086	0,633531998	0,772018416
101120	0,461955061	0,613638304	0,776016695
101165	0,474958410	0,637147043	0,792016966
101180	0,480988015	0,656131003	0,798039419
101209	0,491952886	0,648744056	0,810999853
101225	0,497975339	0,674269817	0,817043764
101254	0,509955872	0,685370728	0,831034166
101285	0,523953427	0,681844053	0,845038873
101300	0,530233372	0,710131487	0,853035432
101314	0,537235725	0,707587644	0,861039143
101344	0,551955688	0,704533931	0,877039414
101359	0,559980857	0,742452927	0,886015873
101388	0,575959670	0,740859910	0,903038959
101403	0,584979045	0,735288676	0,912015418
101433	0,601959216	0,764040525	0,930776576
101464	0,618975149	0,769402261	0,949015597
101479	0,627973066	0,804063339	0,958042124
101508	0,644989000	0,805971641	0,977761724
101524	0,654952512	0,840343791	0,987038591
101539	0,663971887	0,839005834	0,997016408
101569	0,682990536	0,861997943	1,018016316
101584	0,692989811	0,869124000	1,028001286
101614	0,712952598	0,870227533	1,049795128
101629	0,721950515	0,882915454	1,060037590
101659	0,743229373	0,924698261	1,082038856
101673	0,753972514	0,916357271	1,094019389
101687	0,764973147	0,947758928	1,105041480
101702	0,776953680	0,957468775	1,118037676
101731	0,801951868	0,970040968	1,144001459
101746	0,814948064	0,986733105	1,158034776
101776	0,841977578	0,999204876	1,186022733

B.2 CP02

Ciclo	COD min [mm]	COD med [mm]	COD max [mm]
1	0,211994643	0,240388865	0,265002245
15	0,215992923	0,240927488	0,271039003
30	0,219976897	0,248847157	0,283040994
45	0,222952361	0,256991882	0,292038911
60	0,225956435	0,260493809	0,301036828
14755	0,200972553	0,315234619	0,447013369
16744	0,200958248	0,313433891	0,447034826
17556	0,199992652	0,334345286	0,446033468
18723	0,199978347	0,331916385	0,446040621
62573	0,202217098	0,317854457	0,449001779
81599	0,209956165	0,347988646	0,456998338
82162	0,209712978	0,322978513	0,456018438
98263	0,214955802	0,328647094	0,463035097
99368	0,214991565	0,338817422	0,463013639
99738	0,213975902	0,329043310	0,462999334
99783	0,214991565	0,351049189	0,462756147
101683	0,214991565	0,354472475	0,463042249
102908	0,215992923	0,337562077	0,464014997
104443	0,215957160	0,352692060	0,464036455
106228	0,215992923	0,355719881	0,465037813
107100	0,216972823	0,335393350	0,465016355
108089	0,216994281	0,341918556	0,466003408
108992	0,217952724	0,339748471	0,466003408
109095	0,217974181	0,354236190	0,466797342

109953	0,218954082	0,337309699	0,467040529
111071	0,218954082	0,333084397	0,468013277
111175	0,218954082	0,336890559	0,468034734
111708	0,218954082	0,336888521	0,469000329
111976	0,219991202	0,357981662	0,469036092
112508	0,219976897	0,344855718	0,469036092
113118	0,220956798	0,339952462	0,470015993
113164	0,219955440	0,351817839	0,470001687
113650	0,220978255	0,346191744	0,470037450
113813	0,220198627	0,345939259	0,471017351
114049	0,220956798	0,354836432	0,471017351
114183	0,220956798	0,344947235	0,471017351
114272	0,220956798	0,346297173	0,471038808
114894	0,221235747	0,339476387	0,472018709
115533	0,221958156	0,348300104	0,473020067
115765	0,221979613	0,355121498	0,473034372
115988	0,221958156	0,362100140	0,473020067
116106	0,221951003	0,356234614	0,473034372
116384	0,222988124	0,337532894	0,473020067
116575	0,222988124	0,338301222	0,474014272
116780	0,222988124	0,350623719	0,474014272
117060	0,222973819	0,343489043	0,474014272
117120	0,222952361	0,352593355	0,475037088
117252	0,222973819	0,341848569	0,475015630
117267	0,222952361	0,341775791	0,475037088
117355	0,222995276	0,346394269	0,475015630
117707	0,223975177	0,347710697	0,476016988
117751	0,223989482	0,354218058	0,476002683
117986	0,223975177	0,355407063	0,477039804
118223	0,223953719	0,363843362	0,477039804
118564	0,223989482	0,344097655	0,478034009
118681	0,223975177	0,351561563	0,478019704
118918	0,224239821	0,363288538	0,478792180
118963	0,224976535	0,365611080	0,478012551
119052	0,224955077	0,359861068	0,478999604
119347	0,224955077	0,352461533	0,478999604
119391	0,224976535	0,367573778	0,479035367
119553	0,224955077	0,358519463	0,480015268
119641	0,224955077	0,344181089	0,480036725
119760	0,224955077	0,342796139	0,480022420
120012	0,225977893	0,342672615	0,481016626
120042	0,225956435	0,369049279	0,481016626
120189	0,225977893	0,364263503	0,481038083
120277	0,225977893	0,369478933	0,482039441
120336	0,225956435	0,343960254	0,482017984
120543	0,225992198	0,353292303	0,482997884
120707	0,226957793	0,354697065	0,483040799
120723	0,226957793	0,347696714	0,483999242
120768	0,226957793	0,361472718	0,484006394
120811	0,226972098	0,344539039	0,484035005
120856	0,226979251	0,347081809	0,485036363
121045	0,227951999	0,346939222	0,485036363
121090	0,227973456	0,347942619	0,485014905
121136	0,227987761	0,345775823	0,486037721
121194	0,227951999	0,369517807	0,486016263
121209	0,227973456	0,351251678	0,486037721
121398	0,227994914	0,347777216	0,487017621
121443	0,228974814	0,370740644	0,488018979
121486	0,228974814	0,349699180	0,488004674
121515	0,228974814	0,348233406	0,488004674
121544	0,228953357	0,348085956	0,488004674
121559	0,228974814	0,363951115	0,488033284
121603	0,228989119	0,347783224	0,488040437
121767	0,228953357	0,348933534	0,490014543
121797	0,229954715	0,361082796	0,490014543
121958	0,230977530	0,374328867	0,492017259
121973	0,230977530	0,358865110	0,491752614
122003	0,230956073	0,350363688	0,492002953
122155	0,230991835	0,369153313	0,493018617
122199	0,230991835	0,363545458	0,493018617
122228	0,231978888	0,355432240	0,493040074
122243	0,231957431	0,378440873	0,493018617
122361	0,231993193	0,376293532	0,494041432
122405	0,232758517	0,369224409	0,495021333
122434	0,232973094	0,377299074	0,495035638
122463	0,232951636	0,358293836	0,495035638
122479	0,232951636	0,380335943	0,496036996
122523	0,232958789	0,373220972	0,496036996
122568	0,232958789	0,380784336	0,496044148
122613	0,232994551	0,363727597	0,497016896

122703	0,233974452	0,359819297	0,497996796
122733	0,233952994	0,382005385	0,498039712
122747	0,233974452	0,378235272	0,498046864
122791	0,233988757	0,377882186	0,498018254
122908	0,234975810	0,358404557	0,499041070
122982	0,235977168	0,366482333	0,500035275
123026	0,235977168	0,359868793	0,501000870
123055	0,234954352	0,357668523	0,501000870
123070	0,235977168	0,365613798	0,501036633
123143	0,235977168	0,357868115	0,502016534
123173	0,235977168	0,358453230	0,503039349
123233	0,236978526	0,372067336	0,503003586
123279	0,236978526	0,379232518	0,503039349
123322	0,236992831	0,381127123	0,504019250
123397	0,237958426	0,360377805	0,505013455
123487	0,237972731	0,361115341	0,504999150
123502	0,238952632	0,377059928	0,505793084
123605	0,238974089	0,362234430	0,507001866
123620	0,238952632	0,388865510	0,507016171
123665	0,238995547	0,390034703	0,508017529
123695	0,239953990	0,363038162	0,509004582
123754	0,239953990	0,386590997	0,509018887
123845	0,240991110	0,388150612	0,510041703
123889	0,240955348	0,366150061	0,511014450
123949	0,240955348	0,378737489	0,512001503
123964	0,241992468	0,391574076	0,512015809
124051	0,242993826	0,382587138	0,512037266
124139	0,243973727	0,394488565	0,514018525
124153	0,243194098	0,386349062	0,514039982
124168	0,243952269	0,395128253	0,514018525
124198	0,243973727	0,372146622	0,515041340
124212	0,243973727	0,383576194	0,515041340
124243	0,243995184	0,394860891	0,516021241
124257	0,243952269	0,384048156	0,516021241
124287	0,243952269	0,369134072	0,517036904
124317	0,243952269	0,369500426	0,518002499
124332	0,244975085	0,370373217	0,518038262
124468	0,245954985	0,375608925	0,520040978
124483	0,245954985	0,395309285	0,520040978
124528	0,246956343	0,380842022	0,521035183
124602	0,247950549	0,383613745	0,522036541
124616	0,247993464	0,389956239	0,522000778
124632	0,247957701	0,400417391	0,523002136
124646	0,247957701	0,375013224	0,523002136
124691	0,248193736	0,399073604	0,524039257
124750	0,249195094	0,375399820	0,524003494
124779	0,249953265	0,377887372	0,526020516
124809	0,249974722	0,405005720	0,526034821
124838	0,249989027	0,403227452	0,527021874
124853	0,249996180	0,405569092	0,527036179
124941	0,251955981	0,394367615	0,528016079
124985	0,251991743	0,381049374	0,529038895
125015	0,252978796	0,379936973	0,531020153
125045	0,252957339	0,392803243	0,532042969
125105	0,253951544	0,399491099	0,532000053
125149	0,254952902	0,406975499	0,534017075
125178	0,254952902	0,388775746	0,535039890
125208	0,254974360	0,384721783	0,536019791
125223	0,255990023	0,402942136	0,536041248
125238	0,255954260	0,384390942	0,536019791
125282	0,256991381	0,408529320	0,536999691
125312	0,257956976	0,392689875	0,538036812
125327	0,257978434	0,415680948	0,538001049
125384	0,258994097	0,388061634	0,540018070
125399	0,259952540	0,411518696	0,541040886
125431	0,259973997	0,416627660	0,543036449
125446	0,259952540	0,406726697	0,543000686
125475	0,260989660	0,396050719	0,544037807
125490	0,260989660	0,398952619	0,545003402
125520	0,261976713	0,420990363	0,545997608
125536	0,261955256	0,421078053	0,546040523
125608	0,263972277	0,401276592	0,548014629
125624	0,263950819	0,423092034	0,549015987
125638	0,264952177	0,395292798	0,549037445
125653	0,264959330	0,418573049	0,550038803
125698	0,265974993	0,421740487	0,552020061
125727	0,266954893	0,408637646	0,553035724
125757	0,267956251	0,409395209	0,554015624
125772	0,267949099	0,399485484	0,555016983
125802	0,268950457	0,414086679	0,556018341

125816	0,268979067	0,404207066	0,557019699
125847	0,269951815	0,408121339	0,558021057
125876	0,270953173	0,418902245	0,559036720
125906	0,271990293	0,434351661	0,560760486
125920	0,272948736	0,423369482	0,561039436
125949	0,273993009	0,414528277	0,563020694
125964	0,274980062	0,408084431	0,564043510
125979	0,274958605	0,427261975	0,565016257
125994	0,275952810	0,438330665	0,566003310
126008	0,275988573	0,414526096	0,567040431
126024	0,276975626	0,436938348	0,568020332
126053	0,277976984	0,412027171	0,570037353
126067	0,278971189	0,419972876	0,571038711
126082	0,278956884	0,423379424	0,572018611
126097	0,279958242	0,414864162	0,573041427
126112	0,280973905	0,439231708	0,574014174
126128	0,281953806	0,440371075	0,575001227
126158	0,282998079	0,428478053	0,577039706
126189	0,284979337	0,420336011	0,580000865
126203	0,285952085	0,424510744	0,581002223
126217	0,286953443	0,448423745	0,582039344
126233	0,286953443	0,451374926	0,584020602
126248	0,287976259	0,453854682	0,585021960
126263	0,288977617	0,454987611	0,586037623
126292	0,290980333	0,457827677	0,588018882
126307	0,291953081	0,431504622	0,589041697
126379	0,296952718	0,452639498	0,596001135
126393	0,297975534	0,446252336	0,597016798
126408	0,298976892	0,466641023	0,598754870
126423	0,299949640	0,443692937	0,600042330
126437	0,300958150	0,462272455	0,602037894
126452	0,301952356	0,466138162	0,603039252
126482	0,304749005	0,446562972	0,606036173
126497	0,305986398	0,474791612	0,607001768
126556	0,311951631	0,479026248	0,615012632
126570	0,312952989	0,477544130	0,617036806
126600	0,315949910	0,467180325	0,620040880
126615	0,317966931	0,488328184	0,622029291
126630	0,318975442	0,460291554	0,624017702
126660	0,322952264	0,494001092	0,627014623
126675	0,323975079	0,468609728	0,630033003
126691	0,325970643	0,496371306	0,632035719
126706	0,327951901	0,500094534	0,633995519
126736	0,331985943	0,501672174	0,639016614
126750	0,333952897	0,492718138	0,642034994
126765	0,335955613	0,492045118	0,644016252
126780	0,337972634	0,511623169	0,647013173
126793	0,339953892	0,481808306	0,649015889
126823	0,344974987	0,513597489	0,654036985
126852	0,348987572	0,523577560	0,659000859
126867	0,351233475	0,503158296	0,662012086
126883	0,353972904	0,529104627	0,665001855
126898	0,356976978	0,512702597	0,668013081
126913	0,359988205	0,534589565	0,671274648
126942	0,364973537	0,529738272	0,678033814
126971	0,370953075	0,515927327	0,685036168
126986	0,373978607	0,518560076	0,688755497
127001	0,376989833	0,539005518	0,692017063
127032	0,383956424	0,560121012	0,698997959
127046	0,387969009	0,542338896	0,703017696
127061	0,390987388	0,549087477	0,707037434
127076	0,394949905	0,540478802	0,711035713
127091	0,398955337	0,571851527	0,716013893
127122	0,406973353	0,584512161	0,725033268
127137	0,411965838	0,590226089	0,730032905
127166	0,420234194	0,592092191	0,741033538
127182	0,425977698	0,599505888	0,745997413
127211	0,434954157	0,593747150	0,757033809
127241	0,445976248	0,607865404	0,768012984
127255	0,450954428	0,609164380	0,773999674
127270	0,455975523	0,608146571	0,780773146
127285	0,461955061	0,615750884	0,786001665
127300	0,466997613	0,633670686	0,793039782
127316	0,473957052	0,625004075	0,799012167
127332	0,479958047	0,661151097	0,806000215
127347	0,485980500	0,665879688	0,813002569
127361	0,491952886	0,670428142	0,819010717
127391	0,504949082	0,659781883	0,833036882
127405	0,511958588	0,683336577	0,840039235
127421	0,518953789	0,694696161	0,848042947

127510	0,568978774	0,735366066	0,902037601
127541	0,587997424	0,776079137	0,923016051
127555	0,596959578	0,765938850	0,933015326
127570	0,606951700	0,779645366	0,944037417
127585	0,616993891	0,772374041	0,954000929
127615	0,638973699	0,795894117	0,976996401
127629	0,648951516	0,817360515	0,989019849
127644	0,660974965	0,842737680	1,002016046
127690	0,697975144	0,887357085	1,040046193

B.3 CP03

Ciclo	COD min [mm]	COD med [mm]	COD max [mm]
1	0,054511550	0,082453291	0,107017046
16	0,054930213	0,084918217	0,109443670
31	0,057456496	0,085925719	0,119256502
77264	0,063719753	0,182416699	0,303016678
78074	0,060432437	0,173989457	0,300761715
78814	0,057838443	0,168674547	0,298762336
80020	0,053565028	0,164709374	0,294300094
80630	0,052565100	0,185102257	0,293052688
81369	0,049989703	0,177706167	0,291456237
81414	0,049890044	0,177607762	0,291612163
83393	0,048808100	0,158904715	0,289865031
85371	0,050759795	0,176224913	0,292782321
85444	0,050056460	0,185572641	0,291982665
86328	0,051720622	0,171806621	0,294731155
87233	0,053894046	0,169992746	0,296161190
87424	0,053753856	0,165054907	0,296939388
88977	0,057697299	0,192141700	0,300467983
89081	0,057671073	0,191444750	0,301300541
89774	0,058655265	0,180048394	0,302190319
89819	0,058982375	0,170193077	0,302379623
90545	0,061653140	0,177608430	0,305392281
90620	0,060581687	0,182285943	0,305186764
91622	0,063890460	0,196408704	0,308558956
91653	0,063666824	0,197056985	0,309044377
92200	0,065799716	0,191041613	0,310856835
92524	0,066676620	0,184284343	0,312243477
92613	0,066683296	0,185449185	0,312310711
92659	0,067013267	0,178148848	0,312527672
92824	0,067080978	0,178957025	0,312892930
93352	0,069173816	0,194152725	0,315416352
93546	0,069048885	0,185775521	0,315962330
93709	0,069647793	0,200625971	0,316712395
93841	0,069176677	0,182379703	0,316897408
94075	0,069822792	0,187098303	0,318350808
94254	0,070688728	0,205416413	0,319304959
94399	0,070139889	0,200368774	0,319134251
94489	0,070401195	0,206504906	0,319784180
94549	0,071083549	0,208910087	0,320473687
94607	0,070967201	0,194342191	0,320447938
94695	0,070292953	0,184750616	0,320528523
94917	0,071178917	0,191771708	0,322051541
94932	0,071127418	0,184962079	0,321492688
94992	0,070989612	0,189782302	0,321847455
95022	0,070891861	0,185095293	0,322002904
95037	0,070556644	0,200926929	0,322080151
95110	0,070829872	0,210592252	0,322414891
95155	0,070384506	0,208022238	0,322955625
95435	0,070851806	0,212042616	0,324038999
95479	0,070913318	0,186559374	0,324516789
95614	0,071489815	0,197955771	0,325666444
95659	0,071371559	0,205489870	0,326037900
95704	0,071737770	0,211608025	0,326404111
95822	0,072242264	0,211512526	0,327728765
95836	0,072000030	0,201612924	0,327258603
95851	0,071911815	0,210603233	0,327044503
95866	0,071914200	0,197741180	0,327549474
95925	0,072412971	0,209793685	0,328112619
95969	0,072155002	0,188127348	0,327992933
95984	0,072073463	0,212886714	0,328381078
96027	0,071830753	0,189363065	0,328732507
96072	0,071681980	0,191990674	0,329126851
96206	0,072196964	0,192308462	0,330378072
96251	0,072694305	0,215813476	0,330635564
96280	0,072632793	0,201818760	0,331213491
96415	0,072880272	0,216402377	0,332697408

96458	0,072881702	0,212131075	0,333211916
96488	0,072870258	0,195925043	0,333244340
96532	0,073264603	0,202263651	0,333562868
96575	0,073554520	0,193542152	0,334367769
96619	0,073726658	0,214345554	0,335409658
96634	0,073677544	0,195958457	0,335801618
96693	0,074344162	0,219468693	0,336534040
96722	0,074507717	0,212700049	0,337610739
96751	0,073897842	0,197243848	0,337068098
96811	0,074691299	0,214457327	0,338569181
96856	0,074483875	0,221203429	0,338981645
96929	0,075065617	0,221581146	0,340507048
96973	0,074944500	0,196844805	0,341433065
97046	0,075254921	0,208909210	0,342366713
97090	0,075968746	0,216334108	0,343310373
97135	0,076597694	0,203550115	0,344069975
97164	0,077031139	0,217269853	0,345078486
97179	0,076953892	0,209069012	0,345004576
97194	0,076874260	0,226860299	0,345388907
97223	0,077148441	0,199822069	0,345826643
97268	0,077180389	0,209566790	0,347361105
97312	0,077906136	0,223419217	0,348616141
97327	0,077822212	0,204530750	0,348735827
97357	0,077895168	0,204272388	0,349612254
97401	0,078303818	0,210196610	0,350992697
97430	0,078537468	0,204408346	0,351703661
97504	0,079315190	0,205287810	0,353504675
97565	0,080329422	0,212284707	0,355244654
97610	0,080724243	0,223688518	0,356620330
97655	0,080787186	0,231675217	0,357443827
97684	0,081389908	0,208583661	0,358330268
97729	0,081933026	0,234346835	0,359540481
97774	0,082317833	0,214904639	0,360501784
97818	0,083484177	0,228959841	0,361838359
97863	0,083902840	0,236921265	0,363514442
97908	0,084747796	0,231141550	0,365033645
97981	0,085736279	0,219813036	0,367106456
98040	0,087282662	0,244472132	0,368966121
98055	0,086872582	0,217336968	0,369209785
98070	0,087676053	0,242482159	0,369810123
98114	0,088809495	0,224828188	0,371791381
98159	0,089800839	0,237187715	0,373471279
98188	0,090007787	0,233073735	0,374537010
98203	0,090301041	0,220592918	0,374782104
98233	0,091275697	0,249415372	0,376174946
98247	0,091405396	0,230508070	0,376779098
98262	0,091358189	0,233564348	0,377323646
98277	0,091842179	0,223142175	0,377946873
98351	0,093612199	0,253099767	0,381545086
98365	0,094120984	0,234909463	0,382142086
98380	0,094510560	0,236855085	0,382598419
98411	0,095192437	0,253197099	0,384236832
98425	0,095754628	0,228219847	0,385146637
98455	0,096764093	0,258759438	0,386426945
98469	0,097022061	0,251586476	0,387290020
98514	0,098136430	0,232543781	0,389641304
98529	0,098622804	0,258780907	0,391133328
98543	0,099034791	0,232912655	0,391697426
98572	0,099997049	0,250298465	0,393466016
98602	0,100959306	0,235946190	0,395261784
98617	0,101495748	0,265947963	0,395797749
98647	0,102594381	0,264920439	0,397563954
98662	0,103383546	0,238297088	0,397790929
98692	0,104342943	0,261492959	0,399644395
98707	0,105420595	0,270253147	0,400732537
98722	0,105830675	0,271542110	0,401350041
98752	0,106540685	0,245109670	0,403374692
98767	0,106949335	0,244358940	0,403896352
98782	0,107570177	0,264371923	0,404620191
98830	0,109141355	0,269484018	0,407607576
98844	0,109853273	0,247954042	0,408405324
98890	0,112031942	0,280337608	0,411689779
98903	0,112363344	0,276220276	0,412967703
98933	0,113409048	0,254965609	0,414682409
98949	0,114502913	0,282856481	0,415807745
98964	0,115092283	0,259381903	0,416353247
98978	0,115782744	0,278132290	0,417759439
98992	0,116357809	0,258523265	0,418665430
99008	0,117039686	0,287259173	0,419666788
99037	0,118982798	0,257949654	0,422345659

99052	0,119609362	0,280016360	0,423785231
99081	0,121124751	0,262013720	0,426415942
99095	0,122380263	0,263582989	0,428025744
99110	0,123048312	0,266330220	0,429448626
99125	0,123954302	0,296285577	0,430471919
99140	0,125258452	0,293048325	0,431841395
99155	0,126633650	0,286122208	0,434025309
99170	0,127163417	0,269051744	0,435351394
99215	0,131226069	0,277358346	0,440419696
99245	0,133060939	0,300254915	0,443250678
99260	0,134074218	0,306468917	0,444967292
99275	0,135530479	0,309447325	0,447068237
99305	0,138798244	0,286443019	0,451034569
99334	0,141188152	0,299966813	0,454394363
99349	0,142243392	0,291568980	0,456075214
99380	0,144924171	0,299047144	0,459754967
99395	0,146420963	0,320194575	0,461715245
99424	0,148399837	0,293469050	0,464628720
99439	0,149652965	0,327663054	0,466928505
99454	0,151184090	0,328770776	0,468409562
99468	0,152779587	0,319522566	0,470536256
99499	0,155736454	0,320542120	0,474167848
99515	0,156929978	0,329076228	0,475994134
99530	0,158815392	0,318956670	0,477867627
99545	0,160289296	0,338683093	0,479881788
99560	0,161849507	0,310389439	0,481787229
99575	0,163035401	0,315901531	0,483963991
99605	0,166452416	0,313923527	0,487897421
99621	0,168700704	0,322487609	0,490681673
99636	0,170384892	0,339325235	0,492467905
99665	0,173886785	0,335569856	0,497867132
99695	0,178040990	0,346578627	0,503479983
99710	0,180073270	0,360121592	0,505879428
99739	0,184983263	0,345510781	0,511881854
99754	0,186703691	0,337009030	0,514412429
99784	0,192008982	0,345753527	0,520735767
99799	0,194389353	0,350696405	0,523772743
99814	0,196189890	0,350426103	0,526132133
99829	0,199401865	0,351648620	0,529534843
99844	0,201417456	0,353421160	0,533069160
99859	0,203943740	0,389149514	0,535656002
99873	0,207070361	0,371202204	0,538876561
99888	0,209378253	0,377319467	0,541850117
99903	0,212125789	0,383744781	0,545515565
99918	0,214945327	0,390013135	0,548718480
99933	0,217334281	0,383322468	0,551648644
99963	0,223588478	0,378368587	0,558855562
100007	0,233150017	0,401804968	0,569808035
100022	0,236782563	0,394287241	0,574003725
100052	0,244222176	0,398773962	0,583241492
100082	0,251696599	0,440778280	0,591723472
100097	0,254941476	0,445334063	0,596286804
100111	0,259087576	0,432972772	0,600852043
100127	0,262407793	0,446517845	0,604709179
100142	0,266150011	0,423830049	0,609356911
100157	0,269714369	0,461364950	0,613321812
100172	0,274255289	0,433468135	0,617976696
100187	0,278520598	0,441213265	0,623018773
100202	0,282647624	0,443941797	0,627316983
100217	0,286682143	0,474716394	0,632783445
100233	0,291714683	0,485206626	0,638053449
100247	0,295664802	0,455812138	0,643017801
100277	0,306000248	0,500455168	0,654278788
100291	0,311013237	0,488932150	0,660235915
100306	0,315730111	0,493219887	0,665693316
100320	0,321438329	0,488446828	0,672350440
100351	0,333704011	0,528363240	0,685587440
100366	0,338890093	0,526253600	0,692847763
100396	0,351623076	0,513174693	0,705773866
100410	0,357570666	0,526905882	0,713340795
100425	0,364293594	0,536811891	0,720446146
100440	0,370417613	0,534653714	0,727035082
100455	0,377946396	0,541413997	0,735569037
100470	0,385417958	0,585331670	0,743827857
100485	0,392810841	0,558267996	0,751853981
100500	0,400896569	0,572384100	0,761000195
100515	0,408072969	0,575389016	0,768668213
100530	0,415810606	0,582010692	0,777156392
100545	0,423895380	0,613486993	0,786421815
100560	0,431985400	0,634667984	0,795246164

100574	0,440572761	0,621850741	0,805709402
100589	0,449400924	0,616065786	0,814342540
100604	0,457851433	0,624886196	0,824039500
100619	0,465756916	0,633422127	0,832080406
100634	0,473876977	0,643185021	0,840924782
100649	0,483339334	0,653539316	0,851540131
100664	0,491867567	0,694848660	0,860927625
100679	0,497352148	0,702824389	0,867095514
100693	0,500555064	0,702719285	0,872006460
100708	0,508115317	0,683275920	0,879600092
100723	0,514737155	0,693782414	0,887099310
100738	0,521146800	0,719961646	0,894712970
100753	0,511429335	0,708146999	0,885970160
100827	0,512642409	0,707676744	0,888950392
100842	0,518704440	0,689478406	0,896822497
100857	0,530956772	0,740511214	0,910926388
100872	0,544766930	0,745277347	0,924471901
100886	0,556509046	0,759948070	0,939025926
100931	0,541435746	0,752930390	0,923875378
100945	0,521715667	0,696505476	0,904551551
100960	0,520161655	0,694222232	0,902011440
101005	1,220131935	1,220492517	1,220842423