



HIDRODINÂMICA DE CÉLULAS ELETROQUÍMICAS COM ELETRODO SEMI-ESFÉRICO ROTATÓRIO

Rachel Manhães de Lucena

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientadores: José da Rocha Miranda Pontes
Norberto Mangiavacchi

Rio de Janeiro
Março de 2013

HIDRODINÂMICA DE CÉLULAS ELETROQUÍMICAS COM ELETRODO
SEMI-ESFÉRICO ROTATÓRIO

Rachel Manhães de Lucena

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Examinada por:

Prof. José da Rocha Miranda Pontes, D.Sc.

Prof. Norberto Mangiavacchi, Ph.D.

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. Oswaldo Esteves Barcia, D.Sc.

Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2013

Lucena, Rachel Manhães de

Hidrodinâmica de células eletroquímicas com eletrodo semi-esférico rotatório/Rachel Manhães de Lucena. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XIII, 141 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 113 – 114.

1. Corrosão. 2. Escoamento no disco rotatório. 3. Eletrodo semi-esférico. I. Pontes, José da Rocha Miranda *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais. III. Título.

*Aos meus pais, Joãozinho e
Rutinha, aqueles que sempre
fazem de tudo pelos seus.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por permitir mais esta conquista em minha vida e por estar sempre comigo, dos dias mais difíceis aos dias de plena alegria.

Ao professor José Pontes pela confiança depositada em mim para realização deste trabalho, pelos incentivos, ensinamentos e compreensão.

Ao professor Norberto Mangiavacchi pelas orientações e horas dedicadas a este trabalho. E também, pela cordial concessão das instalações do GESAR/UERJ para as simulações numéricas realizadas.

Aos professores Roberto Oliveira e Alvaro Coutinho pelas disciplinas com as quais me fizeram crescer em conhecimentos científicos e em que ambos me mostraram a importância da Matemática nas ciências da Engenharia.

Ao Gustavo Anjos e Gustavo Oliveira pela boa vontade em ajudar com o código numérico, desde a instalação às simulações realizadas.

Aos meus colegas da MetalMat: Nathália Leite, Eberson Moraes e Carlos Mendez nos grupos de estudos e pelo companheirismo, em especial a paciência que Carlos praticou comigo. Ao Pedro Torres com todas as dicas sobre MATLAB.

Ao meu amigo Benaia Sobreira pelo incentivo e confiança que desde sempre depositou em mim e claro com a ajuda no uso do \LaTeX .

Aos meus familiares e amigos por todo apoio e incentivo.

Ao Bruno Jaccoud pelo amor, carinho, dedicação, incentivo, paciência, paciência, ..., paciência e compreensão durante esta pequena árdua caminhada.

E por fim, ao fundamental apoio financeiro do CNPq e FAPERJ.

A todos estes, o meu sincero agradecimento!

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

HIDRODINÂMICA DE CÉLULAS ELETROQUÍMICAS COM ELETRODO SEMI-ESFÉRICO ROTATÓRIO

Rachel Manhães de Lucena

Março/2013

Orientadores: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

Nesta dissertação são utilizadas duas metodologias para obtenção da hidrodinâmica de células eletroquímicas com eletrodo semi-esférico rotatório.

Para o estudo do campo hidrodinâmico e do transporte de uma espécie química para o fluido com viscosidade variável, utilizamos um formalismo analítico em séries de potências e resolvemos numericamente com o Método de relaxação, que tem como base o método de Newton e o método das diferenças finitas. Para a variação do ângulo meridional θ de $0 \leq \theta \leq \pi/2$, os perfis de velocidade F , G e H são similares ao caso da viscosidade constante; os perfis de concentração C são similares ao escoamento no disco rotatório com viscosidade variável e as derivadas dos perfis de velocidade nas proximidades da superfície da semi-esfera não são similares ao caso da viscosidade constante, com uma quase exceção do perfil H .

O Método de elementos finitos (MEF) foi utilizado para obtenção do campo hidrodinâmico do escoamento de um fluido com viscosidade constante no eletrodo semi-esférico rotatório, com o objetivo de comparar as duas metodologias. A hipótese utilizada no método de série de potências tratava do escoamento na camada limite, sendo assim, para o número de Reynolds alto, porém para que as simulações através do MEF pudessem gerar resultados compatíveis com o da primeira metodologia foi considerado um valor para o número de Reynolds (Re) igual a 40, que para a teoria da camada limite é um número de Re baixo. Os resultados apresentados necessitam de mais simulações numéricas para a obtenção final dos perfis de velocidade.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

HYDRODYNAMICS OF ELECTROCHEMICAL CELLS WITH A ROTATING SEMI-SPHERICAL ELECTRODE

Rachel Manhães de Lucena

March/2013

Advisors: José da Rocha Miranda Pontes

Norberto Mangiavacchi

Department: Metallurgical and Materials Engineering

In this dissertation, two methods are used to obtain the hydrodynamics of electrochemical cells with rotating semi-spherical electrode.

To study the hydrodynamic field and transport of a chemical species for the fluid with variable viscosity, we use an analytical formalism in power series and we solved numerically with the relaxation method, which is based on Newton's method and finite difference method. For the variation in the meridional angle θ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$, the velocity profiles F , G and H are similar to the case of constant viscosity, the concentration profiles C are similar to the flow in rotating disk with variable viscosity and velocity profiles derived from near the surface of the semi-sphere are not similar to the case of constant viscosity, with the exception of an almost H profile.

The finite element method (FEM) was used to obtain the field hydrodynamic flow of a fluid with constant viscosity in the rotating semi-spherical electrode, in order to compare the two methodologies. The hypothesis used in the method of the power series in the flow was boundary layer, and thus the Reynolds number for high, but so simulations through the FEM could generate consistent results with the methodology was first considered a value for the Reynolds number (Re) equal to 40, for which boundary layer theory is a Re number low. The results presented require additional numerical simulations for obtaining better results of the velocity profiles.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Proposta	4
1.2 Objetivos	5
1.3 Estrutura textual	5
2 Equações de governo	7
2.1 Conservação da Massa	7
2.2 Conservação da quantidade de movimento	9
2.3 Fluidos Newtonianos	12
2.4 Equação de Navier-Stokes	13
2.5 Transporte de uma espécie química	14
3 Método de Relaxação	17
3.1 Aplicação do método	17
3.2 Método das Diferenças Finitas	18
3.3 Correção	19
3.4 Exemplo	20
3.5 Algoritmo	24
4 Método dos elementos finitos	26
4.1 Formulação Variacional	26
4.2 Método de Galerkin semidiscreto	30
4.3 Método semi-Lagrangeano	35
4.4 Malha dos elementos finitos e o elemento <i>MINI</i>	36
5 Viscosidade Variável	37
5.1 Modelagem matemática	37
5.2 Primeiro sistema (Para θ^0 e θ^1)	40

5.3	Segundo sistema (Para θ^2 e θ^3)	42
5.4	Terceiro sistema (Para θ^4 e θ^5)	45
5.5	Quarto sistema (Para θ^6 e θ^7)	47
5.6	Quinto sistema (Para θ^8 e θ^9)	50
5.7	Sexto sistema (Para θ^{10} e θ^{11})	53
5.8	Sétimo sistema (Para θ^{12} e θ^{13})	57
5.9	Oitavo sistema (Para θ^{14} e θ^{15})	61
5.10	Nono sistema (Para θ^{16} e θ^{17})	65
5.11	Décimo sistema (Para θ^{18} e θ^{19})	69
5.12	Estrutura da matriz com as derivadas parciais das equações discreti- zadas	73
5.13	Resultados numéricos parciais	75
5.14	Resultados numéricos - soma das parciais	78
5.15	Ângulo de descolamento	81
5.16	Comparação das derivadas	86
6	Resultados numéricos através do Método dos Elementos Finitos	92
6.1	Um pouco do código	92
6.2	Malha computacional	92
6.3	Condições de Contorno	94
6.4	Resultados qualitativos	94
6.5	Resultados quantitativos	102
7	Conclusão	112
	Referências Bibliográficas	113
A	Sistemas de EDOs das séries de potências - Viscosidade constante	115
A.1	Simplificação das equações pela teoria da Camada Limite	115
A.2	Metodologia	119
A.3	Primeiro sistema (θ^0 e θ^1)	120
A.4	Segundo sistema (θ^2 e θ^3)	121
A.5	Terceiro sistema (θ^4 e θ^5)	121
A.6	Quarto sistema (θ^6 e θ^7)	121
A.7	Quinto sistema (θ^8 e θ^9)	122
A.8	Sexto sistema (θ^{10} e θ^{11})	122
A.9	Sétimo sistema (θ^{12} e θ^{13})	123
A.10	Oitavo sistema (θ^{14} e θ^{15})	123
A.11	Nono sistema (θ^{16} e θ^{17})	124
A.12	Décimo sistema (θ^{18} e θ^{19})	125

A.13 Resultados	126
B Código em MATLAB	127
C Painel PEMM 2012	132
D ENCIT	134

Lista de Figuras

1.1	Célula eletroquímica com eletrodo semi-esférico rotatório	4
5.1	Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 20^\circ$	79
5.2	Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 40^\circ$	79
5.3	Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 60^\circ$	80
5.4	Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 80^\circ$	80
5.5	Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 90^\circ$	81
5.6	Perfil H para $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° com ν constante e variável . . .	82
5.7	Perfil C para $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° com ν variável	85
5.8	Perfis F', F'', G', G'', H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 20^\circ$	87
5.9	Perfis F', F'', G', G'', H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 40^\circ$	88
5.10	Perfis F', F'', G', G'', H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 60^\circ$	89
5.11	Perfis F', F'', G', G'', H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 80^\circ$	90
5.12	Perfis F', F'', G', G'', H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 90^\circ$	91
6.1	Malhas computacionais	93
6.2	Malha computacional semi-esférica reformulada	93
6.3	Condições de contorno da semi-esfera	94
6.4	Magnitude da Velocidade	95
6.5	Componente x da velocidade	96
6.6	Componente y da velocidade	96
6.7	Componente z da velocidade	97
6.8	Magnitude da Velocidade	98
6.9	Componente x da velocidade	98
6.10	Componente y da velocidade	99
6.11	Componente z da velocidade	99

6.12	Magnitude da Velocidade	100
6.13	Componente x da velocidade	101
6.14	Componente y da velocidade	101
6.15	Componente z da velocidade	102
6.16	Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$	103
6.17	Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$	104
6.18	Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$	105
6.19	Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$	106
6.20	Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 60$	107
6.21	Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 60$	108

Lista de Tabelas

5.1	Resultados dos sistemas de equações diferenciais	75
5.2	Resultados de ν e ν' para cada sistema de equações	76
5.3	Valores de H para viscosidade constante	83
5.4	Valores de H para viscosidade variável	84
5.5	Valores de C para viscosidade variável	85
6.1	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 5^\circ$	109
6.2	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 10^\circ$	109
6.3	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 15^\circ$	109
6.4	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 20^\circ$	109
6.5	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 40^\circ$	110
6.6	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 60^\circ$	110
6.7	Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 80^\circ$	110
6.8	Comparação de malhas para e condições de contorno $\theta = 90^\circ$	110
A.1	Resultados dos sistemas de equações diferenciais com ν -constante . . .	126

Capítulo 1

Introdução

Ao longo dos últimos 15 anos o grupo de pesquisa na área de Eletroquímica Aplicada do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais (PEMM) da COPPE/ UFRJ vem realizando estudos sobre a hidrodinâmica de células eletroquímicas com eletrodo de disco rotatório e semi-esférico rotatório. Os estudos conduzidos no PEMM compreendem tanto aspectos experimentais quanto teóricos da linha de pesquisa.

Os estudos teóricos utilizam ferramentas matemáticas e computacionais para a modelagem e implementação numérica do escoamento sobre os eletrodos de disco e semi-esfera rotatórios de células eletroquímicas. Estes têm produzido resultados significantes, podemos citar: a dissertação de mestrado de Anjos[1], que abordou o campo hidrodinâmico de células eletroquímicas através do Método dos Elementos Finitos (MEF), o trabalho de mestrado realizado por Oliveira[2], sobre a estabilidade de células eletroquímicas e da dissertação de Ferreira[3] sobre o campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios, ambos com a metodologia do MEF.

O escoamento sobre o disco rotatório é descrito por uma solução similar as soluções encontradas por von Kármán (1921)[4] através da qual as equações diferenciais parciais (EDPs) governantes originais são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) não-lineares. Devido à existência desta solução similar ao escoamento sobre o disco rotatório, os resultados dos estudos sobre este problema têm sido amplamente utilizados como um protótipo não apenas na eletroquímica, mas também, em outros domínios de conhecimento, tais como: na aerodinâmica, turbomáquinas, crescimento de cristais, transferência de calor em equipamentos eletrônicos, dispositivos cirúrgicos de assistência circulatória, lubrificação, entre outros.

A utilização de eletrodos de disco rotatório apresenta uma limitação resultante do fato de que a superfície do eletrodo perde a geometria original devido a dissolução do ferro nos meios ácidos do eletrólito. Uma configuração alternativa consiste em empregar eletrodos semi-esféricos, pois estes mantêm sua geometria quando dissol-

vidos. Entretanto, a abordagem teórica - a análise matemática - torna-se um grande desafio por não haver uma solução similar da hidrodinâmica referente as proximidades da esfera rotatória.

No ano de 1996, Godinez[5] defendeu sua tese de doutorado em que abordou a teoria para o estado estacionário do eletrodo semi-esférico rotatório, restringiu-se ao desenvolvimento das equações que traduzem o comportamento hidrodinâmico e de transporte de massa. Para a resolução do problema hidrodinâmico utilizou duas metodologias; uma delas foi a integração numérica para as equações da camada limite e a outra um desenvolvimento formal semi-analítico através de séries de potências; em ambos os resultados foram equivalentes. Por intermédio desses resultados, a equação do transporte de massa foi solucionada considerando as séries de potências para a concentração.

Entre os diversos pesquisadores que estudaram o comportamento hidrodinâmico gerado por uma esfera rotatória, podemos citar: Lamb[6], Bickley[7] e Stokes[8]. Godinez[5] baseou-se no trabalho de Howarth[9], que obteve a solução desse problema através da aproximação da teoria da camada limite.

Dessa forma, definiu as componentes do vetor velocidade, em coordenadas esféricas, como v_r , v_θ e v_ϕ nas direções de r , θ e ϕ , respectivamente, obtendo as seguintes equações da camada limite:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta = 0 \quad (1.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r_0} v_\phi^2 = \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \quad (1.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta v_\phi = \nu \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} \quad (1.3)$$

onde as equações (1.1), (1.2) e (1.3) tratam-se, respectivamente, das equações da continuidade, quantidade de movimento na direção θ e ϕ . E ainda, r_0 é o raio da semi-esfera e ν a viscosidade cinemática.

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} v_r &= v_\theta = 0 \quad \text{e} \quad v_\phi = r_0 \bar{\Omega} \sin \theta & \text{em} \quad r = r_0 \\ v_\theta &= v_\phi = 0 & \text{em} \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

onde $\bar{\Omega}$ é a velocidade estacionária de rotação da esfera.

A solução para o sistema formado pelas Eqs. (1.1)-(1.3) para as velocidades v_r ,

v_θ e v_ϕ em séries de potências de θ foi dada por:

$$v_\theta = r_0 \bar{\Omega} F(\theta, \eta) = r_0 \bar{\Omega} [\theta F_1(\eta) + \theta^3 F_3(\eta) + \theta^5 F_5(\eta) + \theta^7 F_7(\eta) + \dots] \quad (1.4)$$

$$v_\phi = r_0 \bar{\Omega} G(\theta, \eta) = r_0 \bar{\Omega} [\theta G_1(\eta) + \theta^3 G_3(\eta) + \theta^5 G_5(\eta) + \theta^7 G_7(\eta) + \dots] \quad (1.5)$$

$$v_r = (\nu \bar{\Omega})^{1/2} H(\theta, \eta) = (\nu \bar{\Omega})^{1/2} [H_1(\eta) + \theta^2 H_3(\eta) + \theta^4 H_5(\eta) + \dots] \quad (1.6)$$

em que η é uma variável adimensional definida por: $\eta = \left(\frac{\bar{\Omega}}{\nu}\right)^{1/2} (r - r_0)$ e F_n , G_n e H_n , para $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, são funções adimensionais.

As duas metodologias utilizadas por Godinez[5], isto é, a integração numérica e séries de potências apresentam os mesmos resultados para os perfis F , G e H para valores do ângulo de $\theta \approx 80^\circ$, usando 10 termos nas séries. Porém, na vizinhança do equador os resultados obtidos não são suficientemente satisfatórios para a inferência do fluxo de saída do fluido, como era proposto pelo autor.

Segundo Godinez[5], para que o método de série de potências chegue aos mesmos resultados da integração numérica direta é necessário aumentar o número de termos das séries para encontrar resultados idênticos para o ângulo θ de 80° ao equador, entretanto, também não obteria um fluxo de saída, ou seja, não haveria a troca de sinal de H até o maior valor da camada limite, que neste caso notou-se por η^* .

No eletrodo semi-esférico rotatório, o estudo do transporte de massa considera que as propriedades físicas do eletrólito são constantes e que não existem forças externas atuando. Assim, temos a equação do transporte de massa, em coordenadas esféricas, utilizada por Godinez[5]:

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2}, \quad (1.7)$$

onde \mathcal{D} é o coeficiente de difusão do eletrólito.

Com as seguintes condições de contorno:

$$c = c_0 \quad \text{em} \quad r = r_0 \quad \text{e} \quad c = c_\infty \quad \text{em} \quad r \rightarrow \infty,$$

onde c_0 e c_∞ são, respectivamente, a concentração das espécies participantes da difusão na superfície do eletrodo e no seio da solução.

Para o cálculo da equação do transporte de massa em regime estacionário, Godinez[5] considerou a metodologia de séries de potências de θ em que a variável da série de potência representa a variável adimensional da concentração. E a solução encontrada é dada por:

$$\Phi = \frac{c - c_\infty}{c_0 - c_\infty} = \Phi_1(\eta) + \theta^2 \Phi_3(\eta) + \theta^4 \Phi_5(\eta) + \dots$$

onde Φ_n é a variável adimensional da concentração com $n = 1, 3, 5, \dots$

A célula eletroquímica a ser estudada é constituída de um eletrodo semi-esférico rotatório que se dissolve no eletrólito composto de uma solução 1M de H_2SO_4 . O eletrodo semi-esférico consiste em um corpo cilíndrico metálico cuja superfície lateral é revestida por uma resina isolante em que uma das extremidades não é isolada e possui o formato de uma semi-esfera de raio idêntico ao do corpo cilíndrico. Compõe-se ainda por um contra-eletrodo constituído por uma malha ao longo de toda a parede lateral da célula com a finalidade de garantir a distribuição uniforme do potencial no interior da célula. E por fim, é composta também por um eletrodo de referência. A esquematização da célula eletroquímica pode ser visualizada através da Fig. 1.1.

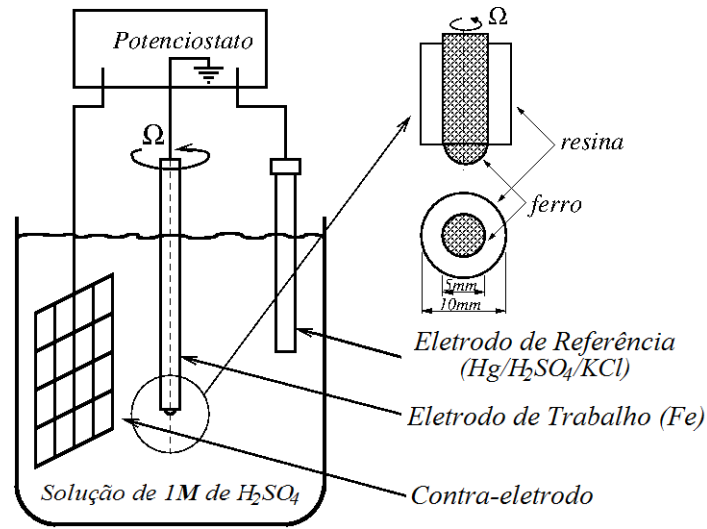


Figura 1.1: Esquematização da célula eletroquímica com eletrodo semi-esférico rotatório

1.1 Proposta

Com base nos trabalhos de Godinez[5], Anjos[1] e Oliveira[2], apresentamos nesta dissertação um estudo da hidrodinâmica e do transporte de massa de células eletroquímicas com eletrodo semi-esférico rotatório.

Realizamos este trabalho em duas etapas, a primeira etapa consistiu na obtenção dos perfis de velocidade e de concentração reproduzindo a metodologia de séries de potências empregada no trabalho de Godinez[5], porém para o caso da viscosidade variável. Para resolução dos sistemas obtidos através das séries utilizamos um método baseado no método das diferenças finitas.

A segunda etapa limitou-se nas soluções numéricas das equações tridimensionais que regem a hidrodinâmica do problema, porém através de simulações computacionais utilizando-se do MEF, como Anjos[1] e Oliveira[2]. O método de Galerkin é

usado para discretizar os termos viscosos e o Método Semi-Lagrangeano o termo convectivo das equações.

1.2 Objetivos

Utilizando Método de Relaxação, para um domínio lateralmente infinito e profundidade especificada para o eletrólito com viscosidade variável:

1. Obter os perfis de velocidade para $0 \leq \theta \leq \pi/2$;
2. Obter o perfil de concentração;
3. Obter as derivadas de primeira e segunda ordem dos perfis de velocidade e compará-las com as derivadas para o fluido com viscosidade constante.

Utilizando o Método dos elementos finitos, para um domínio lateralmente infinito e profundidade especificada (eletrólito com viscosidade constante):

1. Desenvolver e inserir funções no código numérico (em C++) para o cálculo dos perfis de velocidades;
2. Obter os perfis de velocidade entre o polo e o equador da semi-esfera;
3. Verificar as funções inseridas no código através da comparação dos resultados obtidos neste trabalho com os da tese de Godinez[5].

1.3 Estrutura textual

Esta seção tem o objetivo de melhorar a localização do leitor com os capítulos e apêndices apresentados no presente texto. A seguir, a organização do texto:

- Capítulo 1 - Introdução, o capítulo corrente que traz uma breve revisão bibliográfica e a proposta desta dissertação;
- Capítulo 2 - Equações de governo, onde são encontradas as equações que regem a hidrodinâmica e o transporte de espécie química deste trabalho;
- Capítulo 3 - Método de relaxação, apresentamos o método numérico que é utilizado para resolução dos sistemas de equações obtidos pelas séries de potências;
- Capítulo 4 - Método dos elementos finitos, apresentamos o método numérico que é utilizado para resolução das equações nas simulações pretendidas por esse método;

- Capítulo 5 - Viscosidade Variável, capítulo do desenvolvimento das séries de potências e os resultados numéricos obtidos pelo método do Cap.3;
- Capítulo 6 - Resultados do MEF, onde são apresentados os resultados obtidos pelo método do Cap.4;
- Capítulo 7 - Conclusão, em que são apresentadas as conclusões finais deste trabalho;
- Apêndice A - Sistemas de EDOs das séries de potências - Viscosidade constante, texto que exhibe os sistemas de equações diferenciais ordinárias obtidos por Godinez[5];
- Apêndice B - *Script* de um dos códigos construídos em MATLAB;
- Apêndice C - Pôster apresentado no Painel PEMM 2012, o qual foi premiado como melhor pôster na categoria mestrado do evento;
- Apêndice D - Artigo apresentado no ENCIT 2012, este se refere ao texto final submetido ao ENCIT 2012.

Capítulo 2

Equações de governo

Este capítulo apresenta as equações que regem os fenômenos de transferência. Apresentam-se as equações para os processos de transporte de massa e de quantidade de movimento em meios contínuos.

2.1 Conservação da Massa

Considere o meio contínuo, seja um fluido arbitrário com massa específica ρ que escoar sobre um volume de controle V - fixo no espaço - onde \mathbf{v} é o campo de velocidades do escoamento. Considere também uma superfície externa S delimitando o volume V e o vetor unitário \mathbf{n} perpendicular à cada ponto desta superfície orientado para fora.

O princípio de conservação da massa determina que *a quantidade acumulada de massa no interior deste volume é igual ao fluxo de massa para fora do volume, em módulo*. Pode-se exprimir, em termos matemáticos, essa taxa de acumulação de massa da seguinte forma:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} dm. \quad (2.1)$$

A expressão (2.1) refere-se a variação da quantidade de massa em cada ponto do volume, como a quantidade infinitesimal de massa dm dá-se por $dm = \rho dV$. Pode-se substituir dm em (2.1) e encontra-se:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho dV) = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (2.2)$$

pois não há variação no tempo dos volumes dV .

O fluxo líquido de massa pode ser expresso por:

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (2.3)$$

onde ρ é a massa específica do fluido, \mathbf{v} campo de velocidades e \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície.

Substituindo a expressão (2.3) na Eq. (2.2) juntamente com a hipótese de balanço de massa descrito anteriormente, obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) trata-se de uma *equação integral* que traduz o *princípio de conservação da massa*.

Por meio do Teorema da Divergência, também chamado Teorema de Gauss, tem-se que:

$$\int_V \text{div} \rho \mathbf{v} dV = \oint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Desta forma, aplicando-se o Teorema de Gauss na Eq. (2.4), obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \text{div} \rho \mathbf{v} dV,$$

então

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (2.5)$$

Para garantir a validade da equação (2.5) em qualquer volume de controle, inclusive para um volume infinitesimal, é necessário que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (2.6)$$

Assim, a Eq. (2.6) é a *equação da continuidade*.

Substituindo-se a identidade vetorial: $\text{div} \rho \mathbf{v} = \rho \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho$ na Eq. (2.6) tem-se que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \rho = 0 \quad (2.7)$$

como, por hipótese, o fluido abordado é incompressível, isto é, não há variação de sua massa específica a Eq. (2.7) transforma-se em:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.8)$$

ou também em coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0. \quad (2.9)$$

E por último, temos a *equação da continuidade* para fluidos incompressíveis em

notação abreviada:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

2.2 Conservação da quantidade de movimento

Sob as mesmas condições de escoamento de um fluido descritas na Seção 2.1 obtém-se as equações de conservação de quantidade de movimento.

O princípio de conservação da quantidade de movimento se assemelha ao princípio de conservação da massa, *a taxa de variação da quantidade de movimento no interior do volume é igual, em módulo, ao fluxo líquido de quantidade de movimento para fora do volume associado a resultante das forças aplicadas à superfície e ao volume.*

Em termos matemáticos, a taxa de acumulação da quantidade de movimento dentro do volume é expressa por:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV. \quad (2.10)$$

Tem-se na Seção (2.1) que o fluxo líquido de massa é dado através da expressão (2.3). Ao multiplicar o termo integrando de (2.3) pelo vetor de velocidade na mesma direção obtém-se a expressão que rege o fluxo líquido dessa componente da quantidade de movimento, ou seja,

$$\oint_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.11)$$

Denota-se por σ o tensor de tensões que atuam sobre a superfície de cada elemento do fluido abordado. Dessa forma, a resultante das forças atuantes sobre a superfície de controle é expressa por:

$$\oint_S \sigma \mathbf{n} dA. \quad (2.12)$$

Por último, a resultante das forças de volume:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.13)$$

A combinação das integrais (2.10)-(2.13) traduz, matematicamente, a *equação integral* que rege o *princípio de conservação da quantidade de movimento*, isto é,

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA + \oint_S \sigma \mathbf{n} dA + \int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.14)$$

Assim como na equação integral da continuidade, emprega-se o Teorema da Divergência para transformar as integrais de superfície em integrais de volume, como segue:

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV = - \int_V \text{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} dV + \int_V \text{div} \sigma dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.15)$$

A legitimidade da Eq. (2.15) deve ocorrer para quaisquer volumes de controle, inclui-se nessa proposição, também, volumes infinitesimais. Sendo assim, para um volume infinitesimal obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v} = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{g}. \quad (2.16)$$

Tem-se que o termo $\text{div}(\rho \mathbf{v}) \mathbf{v}$ da Eq. (2.16) é equivalente a forma tensorial $\text{div}(\rho \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}$ e esta possui a seguinte identidade:

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v} = (\rho \mathbf{v}) \mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}).$$

Então, a Eq. (2.16) pode ser reescrita como:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho \mathbf{v}) \mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}) = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{g},$$

rearranjando os termos, tem-se

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v} \right) + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

Como $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0$, da equação da continuidade (Eq. (2.6)), então

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{grad} \mathbf{v} \right) \mathbf{v} = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

O membro esquerdo da Eq. (2.18) possui, implicitamente, um operador utilizado no desenvolvimento da Mecânica dos Fluidos, trata-se do operador *derivada substancial*. E, este operador fornece a derivada total em relação ao tempo de uma propriedade da partícula de um fluido em movimento, com velocidade \mathbf{v} . Expondo explicitamente o operador *derivada substancial* e dividindo a equação por ρ , obtém-se:

$$\frac{D \mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \text{div} \sigma + \mathbf{g}. \quad (2.19)$$

O tensor de tensões utilizado nas equações anteriores, notado pela letra grega σ , pode ser decomposto na soma de dois tensores, um tensor relativo à pressão e outro

à viscosidade:

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \tau, \quad (2.20)$$

onde p é um escalar referente a pressão do fluido, \mathbf{I} tensor identidade e τ denota o tensor de tensões viscosas.

Ao substituir a relação (2.20) na Eq. (2.19) tem-se:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} p\mathbf{I} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tau + \mathbf{g},$$

como $\operatorname{div} p\mathbf{I} = \mathbf{grad} p$, finalmente:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tau + \mathbf{g}. \quad (2.21)$$

Em notação abreviada,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \tau + \mathbf{g}. \quad (2.22)$$

A Eq. (2.22) refere-se a *equação da quantidade de movimento* em notação vetorial.

A seguir, temos a Eq.(2.22) expandida em coordenadas esféricas em termos do tensor de tensões τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] &+ g_r \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right] &+ g_\theta \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\ \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] &+ g_\phi, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{\phi\phi}$, $\tau_{r\phi}$, $\tau_{\theta\phi}$ e $\tau_{\phi r}$ representam as componentes do tensor de tensões de fluidos newtonianos, dadas ao final da Seção 2.3.

2.3 Fluidos Newtonianos

Abstratamente, define-se um fluido como um material que se deforma indefinidamente quando submetido a uma tensão (tangencial) de cisalhamento, ainda que esta seja muito pequena. Um fluido classifica-se de acordo com a relação entre a tensão de cisalhamento aplicada e a taxa de deformação angular do fluido.

A tensão de cisalhamento, para o caso em que um fluido tenha apenas uma componente de velocidade, é dada por:

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (2.26)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido e $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ é a taxa de deformação angular de um elemento do fluido.

No caso em que existam duas componentes de velocidades (v_x e v_y), a taxa de cisalhamento é expressa por:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \quad (2.27)$$

Ou ainda, mais geralmente,

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.28)$$

A *relação constitutiva* dada pela Eq. (2.28) é a forma da tensão de cisalhamento para um fluido incompressível, como será tratado neste trabalho. Diz-se que um fluido é *newtoniano* se as relações constitutivas dadas pelas Eqs. (2.26)-(2.28) forem diretamente proporcionais.

Em notação vetorial, tem-se que $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla \mathbf{v}$. Logo, pode-se escrever o tensor de tensões como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T). \quad (2.29)$$

Em coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) , as componentes do tensor de tensões para fluidos newtonianos são dadas por:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right), \\ \tau_{\theta\theta} &= \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right], \\ \tau_{\phi\phi} &= \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} &= \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right], \\
\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} &= \mu \left[\frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \text{ e} \\
\tau_{\phi r} = \tau_{r\phi} &= \mu \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right).
\end{aligned}$$

2.4 Equação de Navier-Stokes

Dentro do contexto da mecânica dos fluidos, a Equação de Navier-Stokes é uma equação diferencial parcial que permite determinar o campo de velocidade e pressão do escoamento de um *fluido newtoniano*. Esta equação também pode ser aplicada a dimensões superiores a um, neste caso, tem-se o termo plural: *Equações de Navier-Stokes*.

A Equação de Navier-Stokes pode ser obtida através da substituição do tensor de tensões $\boldsymbol{\tau}$ - dado pela Eq. (2.29) - na equação da quantidade do movimento (2.21). Ou seja,

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu (\mathbf{grad} \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T) + \mathbf{g}. \quad (2.30)$$

Considerando μ constante, o segundo termo do lado direito da Eq. (2.30) pode ser expandido. Assim, obtém-se:

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mu (\mathbf{grad} \mathbf{v} + (\mathbf{grad} \mathbf{v})^T) = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Portanto, a Eq. (2.30) torna-se:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (2.31)$$

onde $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ é a *viscosidade cinemática* do fluido.

A Eq. (2.31) pode ser escrita também como:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}. \quad (2.32)$$

A Eq.(2.32) expandida em coordenadas esféricas, (r, θ, ϕ) , é dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\
& \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2} v_r - \right. \\
& \quad \left. \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + g_r \\
& \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
& \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\
& \quad \left. \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + g_\theta \quad (2.33) \\
& \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\
& \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin \theta} + \right. \\
& \quad \left. \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + g_\phi.
\end{aligned}$$

O conjunto de equações (2.33) está expresso com ρ e μ constantes em termos do gradiente de velocidade para um fluido newtoniano, isto é, para o caso da viscosidade constante.

2.5 Transporte de uma espécie química

Seja um fluido qualquer com massa específica ρ que escoar por um volume de controle V . O princípio que rege o transporte de uma espécie química enuncia que: *a taxa de acumulação da quantidade de massa da espécie química que entra no volume por unidade de tempo é igual ao fluxo líquido de massa para fora do volume, na ausência de termos de produção e em módulo.*

A taxa de acumulação de massa de uma espécie química pode ser expressa por:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV,$$

onde c denota a concentração da espécie química presente no fluido.

A seguir, a integral de superfície refere-se ao fluxo líquido de concentração devido

ao transporte de massa para dentro e para fora do volume V :

$$\oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA,$$

em que c é a espécie química presente no fluido, \mathbf{v} é o vetor de velocidades e \mathbf{n} é a componente normal paralela ao escoamento.

E por fim, o fluxo líquido de massa para fora do volume de controle, devido à difusão, pode ser expresso por:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Logo, substituindo-se as expressões acima no enunciado do princípio de transporte de uma espécie química, encontra-se a equação na forma integral, ou seja,

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \oint_S c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA - \oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (2.34)$$

Ao aplicar o Teorema de Gauss na Eq. (2.34), obtém-se:

$$\int_V \frac{\partial c}{\partial t} dV = - \int_V \text{div} c \mathbf{v} dV - \int_V \text{div} \mathbf{J} dV. \quad (2.35)$$

Ou melhor,

$$\int_V \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} c \mathbf{v} \right) dV = - \int_V \text{div} \mathbf{J} dV,$$

esta equação é válida para qualquer volume de controle, então para um volume infinitesimal tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} c \mathbf{v} = -\text{div} \mathbf{J},$$

expandindo o termo $\text{div} c \mathbf{v}$ tem-se:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c = -\text{div} \mathbf{J},$$

mas pela equação da continuidade (2.8) tem-se que $\text{div} \mathbf{v} = 0$. Logo,

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c = -\text{div} \mathbf{J}. \quad (2.36)$$

Através da *Primeira Lei de Fick*, tem-se que o fluxo difusivo é dado por:

$$\mathbf{J} = -\mathcal{D} \mathbf{grad} c, \quad (2.37)$$

onde \mathcal{D} é o coeficiente de difusão.

Desta forma, inserindo a Eq. (2.37) na Eq. (2.36) obtém-se:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} c = \text{div} (\mathcal{D} \mathbf{grad} c). \quad (2.38)$$

A Eq.(2.38) em coordenadas esféricas é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial c}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \mathcal{D} \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathcal{D} \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\mathcal{D} \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

É possível notar que o primeiro membro da Eq. (2.38) refere-se ao operador derivada substancial. Logo, a equação de transporte de massa de uma espécie química, em notação vetorial abreviada, é dada por:

$$\frac{Dc}{Dt} = \nabla \cdot (\mathcal{D} \nabla c). \quad (2.40)$$

Capítulo 3

Método de Relaxação

O *método de relaxação* é um método iterativo que possibilita solucionar sistemas de equações diferenciais lineares ou não-lineares, através da solução de sistemas esparsos que surgem pelo método das diferenças finitas.

3.1 Aplicação do método

Supondo um sistema de equações diferenciais linear ou não-linear, o procedimento realizado na aplicação do método de relaxação consiste em algumas etapas. De forma geral são elas:

- Discretização das equações do sistema;
- Cálculo de derivadas parciais das equações discretizadas;
- Implementação numérica do problema com o cálculo do resíduo com implementação da correção.

Na primeira etapa as equações do sistema de equações diferenciais são discretizadas através das diferenças centradas descritas na Seção (3.2) e lembrando que se deve utilizar as diferenças com o erro de mesma ordem de arredondamento.

A etapa posterior consiste em calcularmos as derivadas parciais em relação aos pontos que as equações do sistema foram discretizadas para a montagem de uma matriz.

Uma terceira etapa coloca em prática a iteratividade do método abordado neste capítulo, na qual o método é implementado numericamente em uma linguagem de programação, neste caso em MATLAB. Resolvemos as equações discretizadas e igualamos a um resíduo; a correção é utilizada para dinamizar as iterações, acelerando ou retardando a convergência do método.

3.2 Método das Diferenças Finitas

O *Método das Diferenças Finitas* é um método de resolução de equações diferenciais baseado na aproximação das derivadas por diferenças finitas.

Nesta seção são descritas as fórmulas de aproximação utilizadas no método das diferenças finitas; estas fórmulas de aproximação podem ser obtidas através da Série de Taylor da função derivada.

Considere uma malha uniforme unidimensional de pontos discretos com n pontos i , igualmente espaçados por Δx , dado por: $\Delta x = L/(n - 2)$, onde L é comprimento do domínio. Seja uma função $f(x)$, $x \in [a, b]$, em que o intervalo $[a, b]$ é representado pelo conjunto:

$$x_i = \{x_0 = a, \dots, x_{n+1} = b\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por simplicidade, notaremos: $f(x) = f$ e $f(x_i) = f_i$. A diferença: $x_{i+1} - x_i$ representa o espaçamento Δx da malha.

Assim, podemos aproximar a função f pela expansão da Série de Taylor:

$$f = f_i + f'_i \frac{\Delta x}{1!} + f''_i \frac{\Delta x^2}{2!} + f'''_i \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (3.1)$$

Sejam os pontos $i - 1$, i e $i + 1$ de uma malha uniforme. Então, temos as aproximações das derivadas de primeira ordem pelas diferenças:

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_i}{\Delta x}, \quad (3.2)$$

$$f'_i = \frac{-f_i + f_{i+1}}{\Delta x} \text{ e} \quad (3.3)$$

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta x}. \quad (3.4)$$

As diferenças (3.2) a (3.4) são ditas, respectivamente, *diferença finita atrasada*, *adiantada* e *centrada*. Para obtenção das diferenças laterais ((3.2) e (3.3)) a Série de Taylor foi truncada no segundo termo e utilizou-se apenas um ponto da malha, sendo o erro de truncamento de primeira ordem, $\mathcal{O}(\Delta x)$. Para a diferença centrada (3.4) a série também foi truncada no segundo termo, porém, como foram utilizados dois pontos, a diferença centrada possui um erro de segunda ordem, $\mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Analogamente, obtemos as derivadas de segunda ordem. Assim, para a diferença centrada temos:

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}. \quad (3.5)$$

A Eq.(3.5) foi obtida a partir da soma do desenvolvimento da Série de Taylor para dois pontos, a saber: $i - 1$ e $i + 1$, e possui um erro de truncamento de segunda

ordem ($\mathcal{O}(\Delta x^2)$).

Utilizando as diferenças que possuem erro de aproximação à ordem $\mathcal{O}(\Delta x^2)$, aumentamos a precisão dos resultados e facilitamos a implementação numérica.

Nas simulações realizadas neste trabalho, utilizamos uma malha uniforme deslocada nos pontos extremos (conhecida pelo termo em inglês, como *staggered*), nesse tipo de malha localizamos a fronteira do sistema no ponto médio do intervalo entre os dois primeiros e os dois últimos pontos.

3.3 Correção

A *correção* é utilizada para acelerar a convergência do método, a cada iteração realizada atribui-se uma porcentagem desta correção à solução encontrada acelerando a convergência e obtendo a solução aproximada desejada.

Para o cálculo da correção podemos supor o sistema de equações representado por:

$$f_j(X_k) = b_j, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

definindo $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$, em que cada f_j representa uma equação do sistema dado e X representa um espaço vetorial em que o argumento de f_i é o vetor $X_k = (F_{i-1}^{(1)}, F_{i-1}^{(2)}, F_{i-1}^{(3)}, \dots, F_i^{(1)}, F_i^{(2)}, F_i^{(3)}, \dots, F_{i+1}^{(1)}, F_{i+1}^{(2)}, F_{i+1}^{(3)}, \dots)$, ou seja, cada elemento do vetor é um termo discretizado das equações do sistema e $i-1$, i e $i+1$ representam pontos de uma malha.

Considerando os dois primeiros termos da Série de Taylor, temos a equação:

$$f_j(X_k + \Delta X_k) = f_j(X_k) + f'_j(X_k)\Delta X_k. \quad (3.7)$$

Suponhamos que $f_j(X_k + \Delta X_k) = b_j$ e $f_j(X_k) = r_j$, em que r_j é dito *resíduo*¹. Podemos substituir estes termos na Eq.(3.7) e obter:

$$b_j = r_j + f'_j(X_k)\Delta X_k, \text{ como } f'_j \in X \Rightarrow \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \Delta X_k = (b_j - r_j).$$

Assim, a Eq.(3.8) exhibe o cálculo da correção mencionada na Seção (3.1).

$$\Delta X_k = \left(\frac{\partial f_j}{\partial X_k} \right)^{-1} \cdot (b_j - r_j), \quad (3.8)$$

onde o termo ΔX_k representa a *correção*.

Note que, na Eq. (3.8) os termos: ΔX_k , b_j e r_j são vetores e o termo $\frac{\partial f_j}{\partial X_k}$ é uma matriz quadrada de ordem $k \cdot n$.

¹Podemos definir o resíduo como uma medida de erro a cada iteração.

A seguir, exemplificamos a aplicação do método em um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares.

3.4 Exemplo

Seja o sistema de equações ordinárias não-lineares:

$$\begin{aligned} H' + 2F &= 0 \\ F'' - HF' - F^2 + G^2 &= 0 \\ G'' - HG' - 2FG &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

1° Passo: Discretização das equações do sistema de equações

A discretização das equações do sistema (3.9) nos pontos $i - 1$, i e $i + 1$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{(-H_{i-1} + H_{i+1})}{2\Delta x} + 2F_i &= 0 \\ \frac{(F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{(-F_{i-1} + F_{i+1})}{2\Delta x} H_i - F_i^2 + G_i^2 &= 0 \\ \frac{(G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{(-G_{i-1} + G_{i+1})}{2\Delta x} H_i - 2F_i G_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Logo, podemos representar cada equação discretizada por uma função, sendo o seu argumento cada termo discretizado da equação. Dessa forma, temos:

$$f_j(F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, G_{i-1}, G_i, G_{i+1}, H_{i-1}, H_i, H_{i+1}), \quad j = 1, 2, 3,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(-H_{i-1} + H_{i+1})}{2\Delta x} + 2F_i, \\ f_2 &= \frac{(F_{i-1} - 2F_i + F_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{(-F_{i-1} + F_{i+1})}{2\Delta x} H_i - F_i^2 + G_i^2 \text{ e} \\ f_3 &= \frac{(G_{i-1} - 2G_i + G_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{(-G_{i-1} + G_{i+1})}{2\Delta x} H_i - 2F_i G_i. \end{aligned}$$

2° Passo: Dedução do cálculo da correção

Para que o sistema de equações (3.10) tenha solução devemos ter:

$$f_j(X_k) = 0, \text{ para } j = 1, 2, 3 \text{ e } k = i - 1, i, i + 1.$$

Porém, por utilizarmos um método iterativo obtemos: $f_j(X_k) = r_j$, onde r_j é o

resíduo. Então, supondo $f_j(X_k + \Delta X_k) = 0$ por (3.1) temos:

$$\begin{aligned} f_j(X_k) + \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \Delta X_k &= 0 \\ r_j + \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \Delta X_k &= 0 \\ \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \Delta X_k &= -r_j \\ \Delta X_k &= -\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_k}\right)^{-1} r_j, \end{aligned}$$

onde ΔX_k é a correção.

3º Passo: Cálculo de derivadas parciais das equações discretizadas

Calculamos as derivadas parciais das equações discretizadas para obtenção da matriz que é representada por $\frac{\partial f_j}{\partial X_k}$ no cálculo da correção.

Para f_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial F_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_1}{\partial F_i} &= 2; & \frac{\partial f_1}{\partial F_{i+1}} &= 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial G_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_1}{\partial G_i} &= 0; & \frac{\partial f_1}{\partial G_{i+1}} &= 0 \text{ e} \\ \frac{\partial f_1}{\partial H_{i-1}} &= -\frac{1}{2\Delta x}; & \frac{\partial f_1}{\partial H_i} &= 0; & \frac{\partial f_1}{\partial H_{i+1}} &= \frac{1}{2\Delta x}. \end{aligned}$$

Para f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial F_{i-1}} &= \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{H_i}{2\Delta x}; & \frac{\partial f_2}{\partial F_i} &= -\frac{2}{\Delta x^2} - 2F_i; & \frac{\partial f_2}{\partial F_{i+1}} &= \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{H_i}{2\Delta x}; \\ \frac{\partial f_2}{\partial G_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_2}{\partial G_i} &= 2G_i; & \frac{\partial f_2}{\partial G_{i+1}} &= 0 \text{ e} \\ \frac{\partial f_2}{\partial H_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_2}{\partial H_i} &= -\frac{(-F_{i-1} + F_{i+1})}{2\Delta x}; & \frac{\partial f_2}{\partial H_{i+1}} &= 0. \end{aligned}$$

Para f_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial F_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_3}{\partial F_i} &= -G_i; & \frac{\partial f_3}{\partial F_{i+1}} &= \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{H_i}{2\Delta x}; \\ \frac{\partial f_3}{\partial G_{i-1}} &= \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{H_i}{2\Delta x}; & \frac{\partial f_3}{\partial G_i} &= -\frac{2}{\Delta x^2} - 2F_i; & \frac{\partial f_3}{\partial G_{i+1}} &= \frac{1}{\Delta x^2} - \frac{H_i}{2\Delta x} \text{ e} \\ \frac{\partial f_3}{\partial H_{i-1}} &= 0; & \frac{\partial f_3}{\partial H_i} &= -\frac{(-G_{i-1} + G_{i+1})}{2\Delta x}; & \frac{\partial f_3}{\partial H_{i+1}} &= 0. \end{aligned}$$

4º Passo: Montagem da matriz com as derivadas parciais das equações discretizadas

Dadas as derivadas parciais das equações f_1, f_2 e f_3 , podemos montar a matriz esparsa com as condições de contorno de cada função, neste caso, F, G e H . Esquemáticamente temos a matriz quadrada A de ordem M :

onde os símbolos \circ representam o número zero; e os símbolos \bullet representam os endereços onde os elementos da matriz são diferentes de zero, ou seja, representam as equações encontradas a partir das derivadas parciais de f_1 , f_2 e f_3 .

O primeiro bloco de símbolos, compreendido pelas linhas: 4, 5 e 6 e colunas: 1 a 9, tem as seguintes características:

- Nas três primeiras colunas alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G e H no ponto $i - 1$ da malha;
- Nas três colunas seguintes alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G e H no ponto i da malha;

- E ainda, nas três últimas colunas alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G e H no ponto $i + 1$ da malha.

Essa distribuição repete-se nos blocos seguintes. Por exemplo:

- $A(4, 3) = A(7, 6) = \dots = A(3n + 1, 3n) = \frac{\partial f_1}{\partial H_{i-1}} = \frac{1}{2\Delta x}$, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;
- $A(5, 6) = A(8, 9) = \dots = A(3n + 2, 3n + 3) = \frac{\partial f_2}{\partial H_i} = -\frac{(-F_{i-1} + F_{i+1})}{2\Delta x}$, para $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$;
- E assim sucessivamente.

5° Passo: Resolução do sistema matricial

A partir da matriz A dada no 4° Passo e a dedução feita no 2° Passo resolvemos o seguinte sistema matricial:

$$Ax = -r,$$

onde A equivale a $\frac{\partial f_j}{\partial X_k}$, x a ΔX_k e r a r_j .

Para o exemplo abordado e também para os sistemas que serão solucionados posteriormente nesta dissertação, encontramos uma matriz esparsa. Desta forma, o sistema linear pode ser resolvido através de métodos numéricos iterativos, tais como Gauss-Seidel e gradientes conjugados.

O método numérico programado em MATLAB para a resolução deste sistema foi o método *default* com o comando \backslash , fazendo $x = -A \backslash r$.

6° Passo: Aplicação da correção

Para cada iteração realizada pelo código numérico encontra-se uma solução do sistema, ou seja, um vetor x . Para acelerar a convergência do método é somada uma porcentagem do vetor x às variáveis do sistema. Podemos expressar computacionalmente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_i &= F_{i-1} + p \cdot x, \\ G_i &= G_{i-1} + p \cdot x, \\ H_i &= H_{i-1} + p \cdot x, \end{aligned}$$

onde p representa um valor porcentual. A esse porcentual somado às variáveis da solução da iteração anterior atribui-se o nome de *correção*.

7° Passo: Critério de convergência

Ao fim de cada iteração é realizado um teste para descobrir se o método convergiu, ou seja, se foi alcançado o zero desejado do sistema de equações. Se o método convergiu as iterações são interrompidas e então pode-se plotar as funções da solução; se não, o programa continua a realizar as iterações até que o critério de convergência seja satisfeito ou atinja o número máximo de iterações.

Neste trabalho, adotamos como critério de convergência a norma da diferença entre o resíduo e a solução desejada. Quando esta norma for inferior a um valor especificado, dizemos que o método convergiu. Em termos matemáticos:

$$||b_j - r_j|| < \epsilon.$$

Nesta dissertação adotamos $\epsilon = 10^{-8}$.

Do 1° passo ao 7° passo são exemplificados os procedimentos a serem realizados para a aplicação do método como mencionado na Seção (3.1).

3.5 Algoritmo

Nesta seção apresentamos o algoritmo para a implementação numérica do método de relaxação.

Algoritmo 1 Algoritmo do Método de Relaxação

Sejam b , $nptos$, $itemax$, p e ϵ .

```
for  $j = 1$  to  $itemax$  do
  for  $i = 2$  to  $(nptos - 1)$  do
     $r(i) = f_i$ 
  end for
  for  $i = 2$  to  $(nptos - 1)$  do
     $A = \frac{\partial f_j}{\partial X_i}$ 
  end for
   $X = A \setminus (b - r)$ 
  for  $i = 1$  to  $nptos$  do
     $F_i = F_i + p * X_i$ 
     $G_i = G_i + p * X_i$ 
     $H_i = H_i + p * X_i$ 
  end for
  if  $|b - r| < \epsilon$  then
    Imprime os resultados
    break
  else
    Continua
  end if
end for
```

Capítulo 4

Método dos elementos finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma importante contribuição na solução de problemas da Engenharia. O início de sua história pode ser assinalado através da proposta de Gauss em utilizar funções de aproximação para solucionar problemas matemáticos, por volta do Século XVIII. A partir daí, diversas outras ideias surgiram e aprimoraram-se até sua formulação atual.

A princípio, o método surgiu para resolver problemas estruturais da mecânica dos sólidos. Porém sua utilização na mecânica dos fluidos deu-se tardiamente devido a presença de não-linearidade nas equações de problemas que modelam a dinâmica dos fluidos.

Trata-se de um método de discretização. Assim neste método, dado um domínio arbitrário este é particionado em sub-domínios chamados *elementos*. O conjunto desses elementos é conhecido por *malha computacional*. Funções simples são utilizadas para aproximar soluções de um problema, as ditas *funções de forma*.

As principais características deste método são: o emprego da forma fraca ou variacional do problema e a solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções dos elementos finitos.

4.1 Formulação Variacional

Enuncia-se o problema: *Seja um domínio arbitrário Ω do contínuo, deseja-se solucionar um sistema de equações diferenciais sob condições de contorno dadas.*

No presente trabalho o sistema referido anteriormente envolve as equações de Navier-Stokes e transporte de massa para escoamentos incompressíveis em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sob certas condições de contorno. Estas são dadas, respectiva-

mente, por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \frac{1}{ReSc} \nabla \cdot (D \nabla c) \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\Gamma & \text{em } \Gamma_1 \\ \mathbf{v}_t = 0 \text{ e } \sigma^{nn} &= 0 & \text{em } \Gamma_2 \\ c &= c_\Gamma & \text{em } \Gamma_3 \end{aligned}$$

onde Γ_i , $i = 1, 2, 3$ são, respectivamente, os contornos para velocidade, pressão e concentração. E ainda, as equações acima encontram-se na forma adimensional.

Em primeira instância, para realizar a forma variacional de um problema é necessário definir duas classes de funções. A primeira delas é a de *funções de teste* e segunda a classe das *funções peso*.

Assim, o espaço de Sobolev das *funções de teste* é dado por:

$$\mathcal{S} := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_c \text{ em } \Gamma_c \}$$

e o espaço das *funções peso* é dado por:

$$\mathcal{V} := \{ \mathbf{w} \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = 0 \text{ em } \Gamma_c \},$$

onde \mathbf{u}_c é o valor da *condição de contorno essencial*, Γ_c um possível contorno,

$$\mathcal{H}^1(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$$

e $\mathcal{L}^2(\Omega)$ é *espaço de Lebesgue*, ou seja, o espaço constituído de todas as funções nomeadas *quadrado-integráveis*, dado por

$$\mathcal{L}^2(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

O processo realizado na formulação variacional consiste na utilização das funções peso na ponderação das equações do sistema. Objetivando encontrar as soluções $\mathbf{v}(x, t) \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$, $p(x, t) \in \mathcal{P} \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ e $c(x, t) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$, ou seja, o vetor de velocidades, a pressão e a concentração da espécie química envolvida no problema.

Em termos matemáticos, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \right\} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q \, d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

e

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c - \frac{1}{ReSc} \nabla \cdot (D \nabla c) \right] r \, d\Omega = 0 \quad (4.3)$$

Nas Eqs. (4.1), (4.2) e (4.3), tem-se as funções peso: \mathbf{w} , q e r referentes a ponderação do vetor de velocidades, a pressão e a concentração, respectivamente. Note que na Eq. (4.1) o campo gravitacional foi desprezado sob a hipótese de não influência ao escoamento do problema estudado.

Distribuindo as integrais, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \\ \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \right\} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q \, d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

e

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c \right) r \, d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{ReSc} \nabla \cdot (D \nabla c) \right] r \, d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

Posteriormente será desenvolvido o *método Semi-Lagrangeano*, por isso, o termo convectivo das Eqs. (4.4) e (4.6) será tratado como derivada total. Então:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c$$

A partir da substituição do termo convectivo para a derivada total, as Eqs. (4.4) e (4.6) são reescritas da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \right\} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

e

$$\int_{\Omega} \left(\frac{Dc}{Dt} \right) r \, d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{1}{ReSc} \nabla \cdot (D \nabla c) \right] r \, d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

A equação de Navier-Stokes (4.7) e a equação da espécie química (4.8) contêm

o termo difusivo que pode ser integrado por partes através do Teorema de Green resultando em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{ \nabla \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] \} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega &= \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \cdot \mathbf{w}] \, d\Gamma - \\ &\int_{\Omega} [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

e

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (D \nabla c)] r \, d\Omega = \int_{\Gamma} [\mathbf{n} \cdot (D \nabla c)] r \, d\Gamma - \int_{\Omega} [D \nabla c] \cdot \nabla r^T \, d\Omega. \quad (4.10)$$

O gradiente de pressão da Eq. (4.4) também é integrado por partes, obtendo assim:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (p \mathbf{w}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} p [\nabla \cdot \mathbf{w}] \, d\Omega. \quad (4.11)$$

Devido as condições de contorno, as funções peso devem ser nulas em todo o contorno. Assim, as integrais no contorno Γ das Eqs. (4.9), (4.10) e (4.11) são nulas. Portanto, o conjunto de equações referentes a forma fraca do problema é:

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p [\nabla \cdot \mathbf{w}] \, d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T \, d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q \, d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r \, d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} (D \nabla c) \cdot \nabla r^T \, d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

A partir do conjunto de equações acima (Eqs. (4.12)-(4.14)), cada integral pode ser representada na forma bilinear. Então, pode-se escrever as seguintes formas bilineares:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w} \right) &= \int_{\Omega} \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ k(\nu; \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} [\nu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T \, d\Omega \\ g(p, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} p [\nabla \cdot \mathbf{w}] \, d\Omega \\ d(p, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{w}) p \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{m}\left(\frac{Dc}{Dt}, \mathbf{w}\right) &= \int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r d\Omega \\ \tilde{k}(D; c, r) &= \int_{\Omega} D \nabla c \cdot \nabla r^T d\Omega\end{aligned}$$

Com a representação bilinear enuncia-se o problema na forma fraca: Achar soluções $\mathbf{v}(x, t) \in \mathcal{V}$, $p(x, t) \in \mathcal{P}$ e $c(x, t) \in \mathcal{C}$ tais que para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0$, $q \in \mathcal{P}_0$ e $c \in \mathcal{C}_0$ satisfaçam:

$$m\left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt}, \mathbf{w}\right) - g(p, \mathbf{w}) + \frac{1}{Re} k(\nu; \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad (4.15)$$

$$d(q, \mathbf{v}) = 0 \quad (4.16)$$

$$\tilde{m}\left(\frac{Dc}{Dt}, \mathbf{w}\right) + \frac{1}{ReSc} \tilde{k}(D; c, r) = 0 \quad (4.17)$$

4.2 Método de Galerkin semidiscreto

O método de Galerkin semidiscreto consiste em uma discretização parcial. Em linhas gerais, as equações são discretizadas somente no domínio espacial mas não no domínio do tempo, permanecendo assim contínuas.

As Eqs. (4.12)-(4.14) estão escritas nas formas adimensional e variacional e podem ser expandidas nas direções ortogonais x , y e z . Considerando $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ tem-se:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{Dv_x}{Dt} w_x d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_x}{\partial x} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \right. \\ \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) d\Omega = 0\end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{Dv_y}{Dt} w_y d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_y}{\partial y} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \right. \\ \left. \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) d\Omega = 0\end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{Dv_z}{Dt} w_z d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p \frac{\partial w_z}{\partial z} d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \right. \\ \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) d\Omega = 0\end{aligned} \quad (4.20)$$

As Eqs. (4.18)-(4.20) foram desacopladas nas direções x , y e z , pois para quaisquer $w_x \in \mathcal{V}_0$, $w_y \in \mathcal{V}_0$ e $w_z \in \mathcal{V}_0$ são satisfeitas. Então, a expansão da equação da continuidade é escrita como:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) q \, d\Omega = 0 \quad (4.21)$$

E por último, a equação da espécie química expandida fica

$$\int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r \, d\Omega - \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial r}{\partial z} \right) d\Omega = 0 \quad (4.22)$$

Como dito anteriormente, o método de Galerkin semidiscreto significa uma discretização parcial em que as funções de aproximação que solucionam o sistema de equações são uma combinação linear entre funções de forma dependentes do tempo e funções em que se deseja aproximação dependente das coordenadas espaciais. Desta forma, considera-se NV , NP e NC como o número de nós de velocidade, pressão e concentração, respectivamente, da malha de elementos que discretiza o domínio Ω . Assim, obtém-se as seguintes funções de aproximação semidiscretas:

$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} u_i(t) N_i(\mathbf{x}), & v_y(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} v_i(t) N_i(\mathbf{x}), & v_z(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} w_i(t) N_i(\mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NP} p_i(t) P_i(\mathbf{x}) & \text{e} & & c(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NC} c_i(t) C_i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

onde os coeficientes u_i, v_i, w_i, p_i e c_i denotam funções contínuas no tempo (t) e as funções $N_i(\mathbf{x})$, $P_i(\mathbf{x})$ e $C_i(\mathbf{x})$ são funções de interpolação na posição \mathbf{x} para a velocidade, pressão e concentração, respectivamente.

A equação de conservação de quantidade de movimento geralmente é avaliada em todos os nós livres de velocidade, sendo assim, as funções peso w_x , w_y e w_z são iguais as funções de interpolação. Desta forma, as funções peso são substituídas pelas funções de forma $N_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, NV$.

Utilizando-se das funções de aproximações e da informação do parágrafo anterior, as Eqs. (4.18)-(4.20) são reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{Du_i}{Dt} N_i N_j \, d\Omega^e - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{NV} \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial N_j}{\partial x} P_i p_i \, d\Omega^e \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \int_{\Omega^e} \nu^e \left[\sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \left(u_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + u_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + u_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. v_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] \, d\Omega^e \right\} = 0 \quad (4.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{Dv_i}{Dt} N_i N_j d\Omega^e - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{NV} \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial N_j}{\partial y} P_i p_i d\Omega^e \right. \\
& \left. \frac{1}{Re} \int_{\Omega^e} \nu^e \left[\sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \left(v_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. u_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] d\Omega^e \right\} = 0 \quad (4.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{Dw_i}{Dt} N_i N_j d\Omega^e - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{NV} \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial N_j}{\partial z} P_i p_i d\Omega^e \right. \\
& \left. \frac{1}{Re} \int_{\Omega^e} \nu^e \left[\sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \left(w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. u_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial y} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \right] d\Omega^e \right\} = 0 \quad (4.25)
\end{aligned}$$

A Eq. (4.21) da continuidade é fortemente relacionada à pressão, desta forma, a função peso q assumirá a somatória das mesmas funções utilizadas na aproximação da pressão. E ainda, como o número de nós de avaliação para os graus de liberdade para o elemento finito *MINI* são iguais nas equações da continuidade e de conservação de transporte de massa tem-se: $NP = NC$. Logo, as Eqs. (4.21) e (4.22) são reescritas como:

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NP} \left(u_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_i \frac{\partial N_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) P_j d\Omega^e \right] = 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{DC_i}{Dt} C_i C_j d\Omega^e \right] - \frac{1}{ReSc} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left[\int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} D^e \cdot \right. \\
& \left. \left(c_i \frac{\partial C_i}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} + c_i \frac{\partial C_i}{\partial y} \frac{\partial C_j}{\partial y} + c_i \frac{\partial C_i}{\partial z} \frac{\partial C_j}{\partial z} \right) d\Omega^e \right] = 0. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

O conjunto de Eqs. (4.23)-(4.27) pode ser representado em um sistema de equações diferenciais ordinárias representando cada elemento, como segue:

$$\begin{aligned}
m_x^e \dot{u}^e + \frac{1}{Re} \{ (2k_{xx}^e + k_{yy}^e + k_{zz}^e) u^e + k_{xy}^e v^e + k_{xz}^e w^e \} - G_x^e p^e &= 0 \\
m_x^e \dot{v}^e + \frac{1}{Re} \{ k_{yx}^e u^e + (k_{xx}^e + 2k_{yy}^e + k_{zz}^e) v^e + k_{yz}^e w^e \} - G_y^e p^e &= 0 \\
m_x^e \dot{w}^e + \frac{1}{Re} \{ k_{zx}^e u^e + k_{zy}^e v^e + (k_{xx}^e + k_{yy}^e + 2k_{zz}^e) w^e \} - G_z^e p^e &= 0 \quad (4.28)
\end{aligned}$$

$$d_x^e u^e + d_y^e v^e + d_z^e w^e = 0$$

$$m_c^e \dot{c}^e - \frac{1}{Re Sc} (k_{cxx}^e + k_{cyy}^e + k_{czz}^e) = 0$$

onde

$$\begin{aligned}
m_{x\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} N_i N_j d\Omega^e & m_{y\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} N_i N_j d\Omega^e \\
m_{z\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} N_i N_j d\Omega^e & k_{xx\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \\
k_{yy\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e & k_{zz\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \\
k_{xy\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e & k_{xz\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \\
k_{yx\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e & k_{yz\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \\
k_{zx\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e & k_{zy\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \nu^e \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NV} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega^e \\
g_{x\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NP} \frac{\partial N_i}{\partial x} P_j d\Omega^e & g_{y\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NP} \frac{\partial N_i}{\partial y} P_j d\Omega^e \\
g_{z\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NV} \sum_{j=1}^{NP} \frac{\partial N_i}{\partial z} P_j d\Omega^e & d_{x\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{j=1}^{NV} P_i \frac{\partial N_j}{\partial x} P_j d\Omega^e \\
d_{y\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{j=1}^{NV} P_i \frac{\partial N_j}{\partial y} P_j d\Omega^e & d_{z\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NP} \sum_{j=1}^{NV} P_i \frac{\partial N_j}{\partial z} P_j d\Omega^e \\
m_{cyy\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} C_i C_j d\Omega^e & k_{cxx\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} D^e \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial C_i}{\partial x} \frac{\partial C_j}{\partial x} d\Omega^e \\
k_{cyy\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} D^e \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial C_i}{\partial y} \frac{\partial C_j}{\partial y} d\Omega^e & k_{czz\{ij\}}^e &= \int_{\Omega^e} D^e \sum_{i=1}^{NC} \sum_{j=1}^{NC} \frac{\partial C_i}{\partial z} \frac{\partial C_j}{\partial z} d\Omega^e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{u}^e &= \left[\frac{Du_1^e}{Dt} \quad \frac{Du_2^e}{Dt} \quad \dots \quad \frac{Du_{NV}^e}{Dt} \right]^T & \dot{v}^e &= \left[\frac{Dv_1^e}{Dt} \quad \frac{Dv_2^e}{Dt} \quad \dots \quad \frac{Dv_{NV}^e}{Dt} \right]^T \\
\dot{w}^e &= \left[\frac{Dw_1^e}{Dt} \quad \frac{Dw_2^e}{Dt} \quad \dots \quad \frac{Dw_{NV}^e}{Dt} \right]^T & u^e &= [u_1^e \quad u_2^e \dots u_{NV}^e]^T \\
v^e &= [v_1^e \quad v_2^e \dots v_{NV}^e]^T & w^e &= [w_1^e \quad w_2^e \dots w_{NV}^e]^T \\
p^e &= [p_1^e \quad p_2^e \dots p_{NP}^e]^T & c^e &= [c_1^e \quad c_2^e \dots c_{NC}^e]^T
\end{aligned}$$

Para simplificar a notação ocultou-se os índices $\{ij\}$ nas funções do conjunto de Eqs (4.28).

O sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs)-Eqs. (4.28) representa cada elemento com suas matrizes e vetores. Em MEF utiliza-se um operador de montagem dito *Assembly* para construir as matrizes e vetores do sistema de EDOs que formam o sistema global. Este operador é dado por: $\mathcal{A}_{e=1}^{nel}$. Deste modo, constroem-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_x &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} m_{x\{ij\}}^e & \mathbf{M}_y &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} m_{y\{ij\}}^e & \mathbf{M}_z &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} m_{z\{ij\}}^e \\
\mathbf{K}_{xx} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{xx\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{yy} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{yy\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{zz} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{zz\{ij\}}^e \\
\mathbf{K}_{xy} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{xy\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{xz} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{xz\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{yx} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{yx\{ij\}}^e \\
\mathbf{K}_{yz} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{yz\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{zx} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{zx\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{zy} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{zy\{ij\}}^e \\
\mathbf{G}_x &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} g_{x\{ij\}}^e & \mathbf{G}_y &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} g_{y\{ij\}}^e & \mathbf{G}_z &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} g_{z\{ij\}}^e \\
\mathbf{D}_x &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} d_{x\{ij\}}^e & \mathbf{D}_y &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} d_{y\{ij\}}^e & \mathbf{D}_z &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} d_{z\{ij\}}^e \\
\mathbf{M}_c &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} m_{c\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{cxx} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{cxx\{ij\}}^e & \mathbf{K}_{cyy} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{cyy\{ij\}}^e \\
\mathbf{K}_{czz} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} k_{czz\{ij\}}^e & \dot{\mathbf{u}} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \dot{u}^e & \dot{\mathbf{v}} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \dot{v}^e \\
\dot{\mathbf{w}} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} \dot{w}^e & \mathbf{u} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} u^e & \mathbf{v} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} v^e \\
\mathbf{w} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} w^e & \mathbf{c} &= \mathcal{A}_{e=1}^{nel} c^e
\end{aligned}$$

Assim, o sistema matricial global torna-se:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{a}} + \frac{1}{Re}\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{G}\mathbf{p} = 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{a} = 0 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{M}_c\dot{\mathbf{c}} + \frac{1}{ReSc}\mathbf{K}_c\mathbf{c} = 0 \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_z \end{bmatrix} & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_X & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{xz} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_Y & \mathbf{K}_{yz} \\ \mathbf{K}_{zx} & \mathbf{K}_{zy} & \mathbf{K}_Z \end{bmatrix} \\
\mathbf{K}_X &= 2\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz} & \mathbf{K}_Y &= \mathbf{K}_{xx} + 2\mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz} \\
\mathbf{K}_Z &= \mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + 2\mathbf{K}_{zz} \\
\mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_y & \mathbf{G}_z \end{bmatrix}^T & \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_z \end{bmatrix}^T \\
\dot{\mathbf{a}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} & \dot{\mathbf{v}} & \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^T & \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}^T \\
\mathbf{M}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} & \mathbf{K}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cxx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{cyy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{czz} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4.3 Método semi-Lagrangeano

O movimento no meio contínuo possui duas descrições, a *Euleriana* e a *Lagrangeana*. Na descrição Euleriana tem-se a observação do movimento exteriormente a partir de um ponto fixo. E na descrição Lagrangeana, o observador acompanha o movimento realizado pela partícula em questão.

O método discutido nesta seção tem sido empregado desde o final dos anos 50. Porém, sua utilização em problemas com predominância convectiva foi substancialmente superior por volta dos anos 80. As principais características que levaram este método a ser aplicado a problemas de advecção-difusão são o passo de tempo grande e a estabilidade que são possíveis de se obter.

Este trabalho versa sobre as equações de Navier-Stokes, para estas equações não há uma grande bibliografia da aplicação do método semi-lagrangeano. Entretanto, trabalhos recentes têm mostrado sua eficiência, essencialmente em problemas com alto número de Reynolds.

4.3.1 O método semi-lagrangeano e as equações de Navier-Stokes

No Cap. 2 citou-se sobre a importância da utilização da notação de derivada material. Nesta subseção faz-se a aplicação do método semi-lagrangeano sobre a derivada material. Então, o termo convectivo através do método semi-lagrangeano

torna-se:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \quad (4.32)$$

Desta maneira, as Eqs. (4.15), (4.16) e (4.17) transformam-se em:

$$m \left(\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t}, \mathbf{w} \right) - g(p^{n+1}, \mathbf{w}) + \frac{1}{Re} k(\nu; \mathbf{v}^{n+1}, \mathbf{w}) = 0 \quad (4.33)$$

$$d(q, \mathbf{v}^{n+1}) = 0 \quad (4.34)$$

$$\tilde{m} \left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t}, r \right) + \frac{1}{ReSc} \tilde{k}(D; c^{n+1}, r) = 0 \quad (4.35)$$

para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_0$, $q \in \mathcal{P}_0$ e $c \in \mathcal{C}_0$, onde $\mathbf{v}_d^n = \mathbf{v}^n(x_d, t^n)$, $c_d^n = c^n(x_d, t^n)$ e x_d é dito ponto de saída, no tempo $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ com a condição inicial $x(t^{n+1}) = x_i$. Portanto, o sistema matricial discreto é dado por:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{G} p^{n+1} = 0 \quad (4.36)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (4.37)$$

$$\mathbf{M}_c \left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{ReSc} \mathbf{K}_c c^{n+1} = 0 \quad (4.38)$$

4.4 Malha dos elementos finitos e o elemento *MINI*

Na discretização do domínio será utilizado o elemento finito *MINI*, pois dentre os vários tipos de elementos finitos que compõem uma malha computacional, o elemento finito *MINI* é o que melhor se aplica a discretização do domínio do problema em questão, devido ao acoplamento de variáveis que as equações de Navier-Stokes exigem, como de velocidade e pressão, satisfazendo também a condição mínima chamada *condição de estabilidade de Babuska-Brezzi*, condição de estabilidade referente ao modo de discretização do problema.

O elemento *MINI* trata-se de um elemento finito tetraédico cúbico da família dos elementos *Taylor-Hood*. Além dos nós referentes aos vértices de um tetraedro este possui também um nó no centróide, totalizando 5 nós, onde os nós referentes aos vértices são utilizados para calcular a pressão e com o nó do centróide combinado com os dos vértices calcula-se a velocidade.

Capítulo 5

Viscosidade Variável

Neste capítulo apresentamos a solução para o escoamento de um fluido newtoniano, sob a hipótese de viscosidade variável, por um eletrodo semi-esférico rotatório.

5.1 Modelagem matemática

Considere as equações de governo dadas no Capítulo 2, destacando-se as equações, em coordenadas esféricas, da continuidade, quantidade do movimento e transporte de espécie química (Eqs.(2.9), (2.24), (2.25) e (2.39)). As equações da camada limite dessas equações que modelam o escoamento do fluido abordado pelo eletrodo semi-esférico rotatório são dadas por:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta = 0 \quad (5.1)$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r_0} v_\phi^2 = \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \nu' \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (5.2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta v_\phi = \nu \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \nu' \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \quad (5.3)$$

$$v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{1}{Sc} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial c}{\partial r} \right), \quad (5.4)$$

onde v_r , v_θ e v_ϕ são as componentes do vetor velocidade nas direções r , θ e ϕ , respectivamente; c é a concentração, r_0 é o raio da semi-esfera, ν a viscosidade cinemática e Sc é o número de Schmidt.

A Eq.(5.1) trata-se da *equação da continuidade*, as Eqs.(5.2) e (5.3) tratam-se das *equações da quantidade de movimento* e a Eq.(5.4) trata-se da *equação da concentração*.

As componentes da velocidade e a concentração das Eqs.(5.1)-(5.4) podem ser

expressas como:

$$v_\theta = r_0 \bar{\Omega} F(\theta, \eta), \quad (5.5)$$

$$v_\phi = r_0 \bar{\Omega} G(\theta, \eta), \quad (5.6)$$

$$v_r = (\nu_\infty \bar{\Omega})^{1/2} H(\theta, \eta), \quad (5.7)$$

$$c = c_\infty + (c_0 - c_\infty) C(\theta, \eta), \quad (5.8)$$

onde $\bar{\Omega}$ é a velocidade angular, c_0 é a concentração das espécies químicas participantes da difusão na superfície do eletrodo e c_∞ é a concentração das espécies químicas participantes da difusão no seio da solução.

Considere as variáveis adimensionais:

$$\eta = (\bar{\Omega}/\nu_\infty)^{1/2} (r - r_0), \quad (5.9)$$

$$\nu^* = \nu/\nu_\infty \text{ e} \quad (5.10)$$

$$\nu'^* = \nu'/\nu_\infty, \quad (5.11)$$

em que ν^* pode ser expressa por $\nu^* = \exp mC$, sendo m uma constante adimensional obtida através de dados experimentais.

Substituindo-se as equações (5.5) a (5.7) juntamente com equações (5.9)-(5.11) na segunda equação da quantidade do movimento, (ver Eq. (5.3)), encontramos:

$$\begin{aligned} (\nu_\infty \bar{\Omega})^{1/2} H \frac{\partial}{\partial r} (r_0 \bar{\Omega} G) + \frac{(r_0 \bar{\Omega} F)}{r_0} \frac{\partial}{\partial \theta} (r_0 \bar{\Omega} G) + \frac{\cot \theta}{r_0} r_0^2 \bar{\Omega}^2 F G &= \\ \nu \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r_0 \bar{\Omega} G) + \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r_0 \bar{\Omega} G) &\Rightarrow \\ (\nu_\infty \bar{\Omega})^{1/2} H (r_0 \bar{\Omega}) \left(\frac{\bar{\Omega}}{\nu_\infty} \right)^{1/2} \frac{\partial G}{\partial \eta} + (r_0 \bar{\Omega}^2 F) \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta r_0 \bar{\Omega}^2 F G &= \\ \nu (r_0 \bar{\Omega}) \left(\frac{\bar{\Omega}}{\nu_\infty} \right) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\bar{\Omega}}{\nu_\infty} \right)^{1/2} \nu' \left(\frac{\bar{\Omega}}{\nu_\infty} \right)^{1/2} (r_0 \bar{\Omega}) \frac{\partial G}{\partial \eta} &\Rightarrow \\ r_0 \bar{\Omega}^2 \left(H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G \right) &= \\ r_0 \bar{\Omega}^2 \left(\nu^* \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu'^* \frac{\partial G}{\partial \eta} \right) &\Rightarrow \\ H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G &= \nu^* \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu'^* \frac{\partial G}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Logo, para facilitar a notação excluem-se os asteriscos (*) das variáveis ν e ν' da equação anterior para exibição da forma adimensional da segunda equação do

movimento (Eq.(5.3)), que toma a seguinte forma:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}. \quad (5.12)$$

Analogamente, pode-se realizar os procedimentos anteriores de adimensionalização nas equações (5.1), (5.2) e (5.4) com as componentes da velocidade e a concentração (ver Eqs.(5.5)-(5.8)) e as variáveis adimensionais (ver Eqs.(5.9)-(5.11)) para obtenção do seguinte conjunto de equações adimensionalizadas:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0 \quad (5.13)$$

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad (5.14)$$

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG - \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} - \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (5.15)$$

$$H \frac{\partial C}{\partial \eta} + F \frac{\partial C}{\partial \theta} - \frac{1}{Sc} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (5.16)$$

onde F , G , H , C , η , ν e ν' são variáveis adimensionais.

O sistema formado pelas Eqs.(5.13)-(5.16) adimensionalizadas é solucionado através do método de séries de potências de θ , transformando o sistema de equações diferenciais parciais em sistemas de equações diferenciais ordinárias, tantos quantos forem os termos das expansões das séries de θ das componentes da velocidade e a concentração da espécie química (ver Eqs.(5.5)-(5.8)).

Desta forma, as funções F , G , H e C e $\cot \theta$ expandidas em série de potências de θ tornam-se:

$$F(\theta, \eta) = \theta F_1(\eta) + \theta^3 F_3(\eta) + \theta^5 F_5(\eta) + \theta^7 F_7(\eta) + \dots \quad (5.17)$$

$$G(\theta, \eta) = \theta G_1(\eta) + \theta^3 G_3(\eta) + \theta^5 G_5(\eta) + \theta^7 G_7(\eta) + \dots \quad (5.18)$$

$$H(\theta, \eta) = H_1(\eta) + \theta^2 H_3(\eta) + \theta^4 H_5(\eta) + \theta^6 H_7(\eta) + \dots \quad (5.19)$$

$$C(\theta, \eta) = C_1(\eta) + \theta^2 C_3(\eta) + \theta^4 C_5(\eta) + \theta^6 C_7(\eta) + \dots \quad (5.20)$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{45} - \frac{2\theta^5}{945} - \frac{\theta^7}{4725} - \frac{2\theta^9}{93555} - \frac{1382\theta^{11}}{638512875} - \dots \quad (5.21)$$

Substituindo as séries (5.17)-(5.21) limitadas até o décimo termo de cada e igualando as mesmas potências de θ obtemos dez sistemas de equações diferenciais acopladas.

A obtenção destes dez sistemas é feita para facilitar na resolução de um sistema maior que pode ser obtido através da substituição das séries de potências. Podemos comparar a resolução deste sistema maior como uma equação matemática em que sabemos que os coeficientes das variáveis são diferentes de zero, logo as raízes da

equação são encontradas a partir das variáveis. Neste caso, as variáveis são os sistemas.

Nas Secs. 5.2 a 5.11 são exibidos estes dez sistemas.

5.2 Primeiro sistema (Para θ^0 e θ^1)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^0 e θ^1 é dado por:

$$\begin{aligned} H'_1 + 2F_1 &= 0 \\ \nu F''_1 + \nu' F'_1 - H_1 F'_1 - F_1^2 + G_1^2 &= 0 \\ \nu G''_1 + \nu' G'_1 - H_1 G'_1 - 2F_1 G_1 &= 0 \\ \frac{1}{\nu} C''_1 - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_1 - Sc H_1 C'_1 &= 0. \end{aligned}$$

As Subsecções 5.2.1 a 5.2.4 mostram o desenvolvimento das equações do primeiro sistema.

5.2.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \eta} &= H'_1 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= F_1 \\ \cot \theta F &= F_1. \end{aligned}$$

Logo:

$$H'_1 + 2F_1 = 0.$$

5.2.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta H_1 F'_1 \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta F_1^2 \\ \cot \theta G^2 &= \theta G_1^2 \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta F''_1 \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta F'_1. \end{aligned}$$

Logo:

$$\nu F''_1 + \nu' F'_1 - H_1 F'_1 - F_1^2 + G_1^2 = 0.$$

5.2.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta H_1 G'_1 \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta F_1 G_1 \\ \cot \theta FG &= \theta F_1 G_1 \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta G''_1 \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta G'_1. \end{aligned}$$

Logo:

$$\nu G''_1 + \nu' G'_1 - H_1 G'_1 - 2F_1 G_1 = 0.$$

5.2.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta C_1'' \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta C_1 \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta H_1 C_1' \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{1}{\nu} C_1'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_1 - ScH_1 C_1' = 0.$$

5.3 Segundo sistema (Para θ^2 e θ^3)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^2 e θ^3 é dado por:

$$\begin{aligned} H_3' + 4F_3 &= \frac{F_1}{3} \\ \nu F_3'' + \nu' F_3' - H_1 F_3' - H_3 F_1' - 4F_1 F_3 + 2G_1 G_3 &= \frac{G_1^2}{3} \\ \nu G_3'' + \nu' G_3' - H_1 G_3' - H_3 G_1' - 4F_1 G_3 - 2F_3 G_1 &= -\frac{F_1 G_1}{3} \\ \frac{1}{\nu} C_3'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_3' - Sc(H_1 C_3' + H_3 C_1' + 2F_1 C_3) &= 0. \end{aligned}$$

As Subseções 5.3.1 a 5.3.4 mostram o desenvolvimento das equações do segundo sistema.

5.3.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^2 H'_3 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 3\theta^2 F_3 \\ \cot \theta F &= \theta^2 \left(F_3 - \frac{F_1}{3} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_3 + 4F_3 = \frac{F_1}{3}.$$

5.3.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^3 (H_1 F'_3 + H_3 F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^3 (3F_1 F_3 + F_3 F_1) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^3 \left(-\frac{G_1^2}{3} + G_1 G_3 + G_3 G_1 \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^3 F''_3 \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^3 F'_3.\end{aligned}$$

Logo:

$$\nu F''_3 + \nu' F'_3 - H_1 F'_3 - H_3 F'_1 - 4F_1 F_3 + 2G_1 G_3 = \frac{G_1^2}{3}$$

5.3.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^3 (H_1 G'_3 + H_3 G'_1) \\
F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^3 (3F_1 G_3 + F_3 G_1) \\
\cot \theta FG &= \theta^3 \left(F_1 G_3 + F_3 G_1 - \frac{F_1 G_1}{3} \right) \\
\nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^3 G''_3 \\
\nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^3 G'_3.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\nu G''_3 + \nu' G'_3 - H_1 G'_3 - H_3 G'_1 - 4F_1 G_3 - 2F_3 G_1 = -\frac{F_1 G_1}{3}.$$

5.3.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^3 C''_3 \\
\frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^3 C'_3 \\
ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc \theta^3 (H_1 C'_3 + H_3 C'_1) \\
ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= 2Sc \theta^3 F_1 C_3.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{1}{\nu} C''_3 - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_3 - Sc(H_1 C'_3 + H_3 C'_1 + 2F_1 C_3) = 0.$$

5.4 Terceiro sistema (Para θ^4 e θ^5)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^4 e θ^5 é dado por:

$$\begin{aligned} H'_5 + 6F_5 &= \frac{F_1}{45} + \frac{F_3}{3} \\ \nu F''_5 + \nu' F'_5 - H_1 F'_5 - H_5 F'_1 - 6F_1 F_5 + 2G_1 G_5 &= H_3 F'_3 + 3F_3^2 - G_3^2 + \frac{G_1^2}{45} + \\ &\quad \frac{2G_1 G_3}{3} \\ \nu G''_5 + \nu' G'_5 - H_1 G'_5 - H_5 G'_1 - 6F_1 G_5 - 2F_5 G_1 &= H_3 G'_3 + 4F_3 G_3 - \frac{F_1 G_3}{3} - \\ &\quad \frac{F_3 G_1}{3} - \frac{F_1 G_1}{45} \\ \frac{1}{\nu} C''_5 - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_5 - Sc(H_1 C'_5 + H_5 C'_1 + 4F_1 C_5) &= Sc(H_3 C'_3 + 2F_3 C_3). \end{aligned}$$

As Subseções 5.4.1 a 5.4.4 mostram o desenvolvimento das equações do terceiro sistema.

5.4.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^4 H'_5 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 5\theta^4 F_5 \\ \cot \theta F &= \theta^4 \left(-\frac{F_1}{45} - \frac{F_3}{3} + F_5 \right). \end{aligned}$$

Logo:

$$H'_5 + 6F_5 = \frac{F_1}{45} + \frac{F_3}{3}.$$

5.4.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^5 (H_1 F'_5 + H_3 F'_3 + H_5 F'_1) \\
F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^5 (5F_1 F_5 + 3F_3^2 + F_1 F_5) \\
\cot \theta G^2 &= \theta^5 \left(G_1 G_5 + G_3^2 + G_5 G_1 - \frac{G_1 G_3}{3} - \frac{G_3 G_1}{3} - \frac{G_1^2}{45} \right) \\
\nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^5 F''_5 \\
\nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^5 F'_5.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\nu F''_5 + \nu' F'_5 - H_1 F'_5 - H_5 F'_1 - 6F_1 F_5 + 2G_1 G_5 &= H_3 F'_3 + 3F_3^2 - G_3^2 + \\
\frac{G_1^2}{45} + \frac{2G_1 G_3}{3}
\end{aligned}$$

5.4.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^5 (H_1 G'_5 + H_3 G'_3 + H_5 G'_1) \\
F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^5 (5F_1 G_5 + 3F_3 G_3 + F_5 G_1) \\
\cot \theta FG &= \theta^5 \left(F_1 G_5 + F_3 G_3 + F_5 G_1 - \frac{F_1 G_3}{3} - \frac{F_3 G_1}{3} - \frac{F_1 G_1}{45} \right) \\
\nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^5 G''_5 \\
\nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^5 G'_5.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\nu G''_5 + \nu' G'_5 - H_1 G'_5 - H_5 G'_1 - 6F_1 G_5 - 2F_5 G_1 &= H_3 G'_3 + 4F_3 G_3 - \frac{F_1 G_3}{3} - \\
\frac{F_3 G_1}{3} - \frac{F_1 G_1}{45}.
\end{aligned}$$

5.4.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^5 C_5'' \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^5 C_5' \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^5 (H_1 C_5' + H_3 C_3' + H_5 C_1') \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= Sc\theta^5 (4F_1 C_5 + 2F_3 C_3). \end{aligned}$$

Logo:

$$\frac{1}{\nu} C_5'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_5' - Sc(H_1 C_5' + H_5 C_1' + 4F_1 C_5) = Sc(H_3 C_3' + 2F_3 C_3).$$

5.5 Quarto sistema (Para θ^6 e θ^7)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^6 e θ^7 é dado por:

$$\begin{aligned} H_7' + 8F_7 &= \frac{F_5}{3} + \frac{F_3}{45} + \frac{2F_1}{945} \\ \nu F_7'' + \nu' F_7' - H_1 F_7' - 8F_1 F_7 + 2G_1 G_7 - H_7 F_1' &= H_3 F_5' + H_5 F_3' + 8F_3 F_5 - \\ &\quad 2G_3 G_5 + \frac{2G_1 G_5}{3} + \frac{G_3^2}{3} + \frac{2G_1 G_3}{45} + \frac{2G_1^2}{945} \\ \nu G_7'' + \nu' G_7' - H_1 G_7' - H_7 G_1' - 8F_1 G_7 - 2F_7 G_1 &= H_3 G_5' + H_5 G_3' + 6F_3 G_5 + \\ &\quad 4F_5 G_3 - \frac{F_3 G_3}{3} - \frac{F_1 G_5}{3} - \frac{F_5 G_1}{3} - \frac{F_1 G_3}{45} - \frac{F_3 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_1}{945} \\ \frac{1}{\nu} C_7'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_7' - Sc(H_1 C_7' + H_7 C_1' + 6F_1 C_7) &= Sc(H_3 C_5' + H_5 C_3' + 4F_3 C_5 + \\ &\quad 2F_5 C_3). \end{aligned}$$

As Subseções 5.5.1 a 5.5.4 mostram o desenvolvimento das equações do quarto sistema.

5.5.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^6 H'_7 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 7\theta^6 F_7 \\ \cot \theta F &= \theta^6 \left(F_7 - \frac{F_5}{3} - \frac{F_3}{45} - \frac{2F_1}{945} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_7 + 8F_7 = \frac{F_5}{3} + \frac{F_3}{45} + \frac{2F_1}{945}.$$

5.5.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^7 (H_1 F'_7 + H_3 F'_5 + H_5 F'_3 + H_7 F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^7 (7F_1 F_7 + 5F_3 F_5 + 3F_5 F_3 + F_7 F_1) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^7 \left(2G_1 G_7 + 2G_3 G_5 - \frac{2G_1 G_5}{3} - \frac{G_3^2}{3} - \frac{2G_1 G_3}{45} - \frac{2G_1^2}{945} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^7 F''_7 \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^7 F'_7.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu F_7'' + \nu' F_7' - H_1 F_7' - 8F_1 F_7 + 2G_1 G_7 - H_7 F_1' &= H_3 F_5' + H_5 F_3' + 8F_3 F_5 \\ -2G_3 G_5 + \frac{2G_1 G_5}{3} + \frac{G_3^2}{3} + \frac{2G_1 G_3}{45} + \frac{2G_1^2}{945}. \end{aligned}$$

5.5.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^7 (H_1 G_7' + H_3 G_5' + H_5 G_3' + H_7 G_1') \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^7 (7F_1 G_7 + 5F_3 G_5 + 3F_5 G_3 + F_7 G_1) \\ \cot \theta F G &= \theta^7 \left(F_1 G_7 + F_3 G_5 + F_5 G_3 + F_7 G_1 - \frac{F_1 G_5}{3} - \frac{F_3 G_3}{3} - \frac{F_5 G_1}{3} - \frac{F_1 G_3}{45} - \right. \\ &\quad \left. \frac{F_3 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_1}{945} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^7 G_7'' \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^7 G_7'. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu G_7'' + \nu' G_7' - H_1 G_7' - H_7 G_1' - 8F_1 G_7 - 2F_7 G_1 &= H_3 G_5' + H_5 G_3' + 6F_3 G_5 + \\ 4F_5 G_3 - \frac{F_3 G_3}{3} - \frac{F_1 G_5}{3} - \frac{F_5 G_1}{3} - \frac{F_1 G_3}{45} - \frac{F_3 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_1}{945}. \end{aligned}$$

5.5.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^7 C_7'' \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^7 C_7' \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^7 (H_1 C_7' + H_3 C_5' + H_5 C_3' + H_7 C_1') \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= Sc\theta^7 (6F_1 C_7 + 4F_3 C_5 + 2F_5 C_3).\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu} C_7'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_7' - Sc(H_1 C_7' + H_7 C_1' + 6F_1 C_7) &= Sc(H_3 C_5' + H_5 C_3' + 4F_3 C_5 + \\ &2F_5 C_3).\end{aligned}$$

5.6 Quinto sistema (Para θ^8 e θ^9)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^8 e θ^9 é dado por:

$$\begin{aligned}H_9' + 10F_9 &= \frac{F_1}{4725} + \frac{2F_3}{945} + \frac{F_5}{45} + \frac{F_7}{3} \\ \nu F_9'' + \nu' F_9' - H_1 F_9' - H_9 F_1' - 10F_1 F_9 + 2G_1 G_9 &= H_3 F_7' + H_5 F_5' + H_7 F_3' + 10F_3 F_7 + \\ &5F_5^2 - 2G_3 G_7 - G_5^2 + \frac{2G_1 G_7}{3} + \frac{2G_3 G_5}{3} + \frac{2G_1 G_5}{45} + \frac{G_3^2}{45} + \frac{4G_1 G_3}{945} + \frac{G_1^2}{4725} \\ \nu G_9'' + \nu' G_9' - H_1 G_9' - H_9 G_1' - 10F_1 G_9 - 2F_9 G_1 &= H_3 G_7' + H_5 G_5' + H_7 G_3' + \\ &8F_3 G_7 + 6F_5 G_5 + 4F_7 G_3 - \frac{F_1 G_7}{3} - \frac{F_3 G_5}{3} - \frac{F_5 G_3}{3} - \frac{F_7 G_1}{3} - \frac{F_1 G_5}{45} - \frac{F_3 G_3}{45} - \\ &\frac{F_5 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_3}{945} - \frac{2F_3 G_1}{945} - \frac{F_1 G_1}{4725} \\ \frac{1}{\nu} C_9'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_9' - Sc(H_1 C_9' + H_9 C_1' + 8F_1 C_9) &= Sc(H_3 C_7' + H_5 C_5' + H_7 C_3' + 6F_3 C_7 + \\ &4F_5 C_5 + 2F_7 C_3).\end{aligned}$$

As Subseções 5.6.1 a 5.6.4 mostram o desenvolvimento das equações do quinto sistema.

5.6.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^8 H'_9 \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 9\theta^8 F_9 \\ \cot \theta F &= \theta^8 \left(F_9 - \frac{F_7}{3} - \frac{F_5}{45} - \frac{2F_3}{945} - \frac{F_1}{4725} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_9 + 10F_9 = \frac{F_1}{4725} + \frac{2F_3}{945} + \frac{F_5}{45} + \frac{F_7}{3}.$$

5.6.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^9 (H_1 F'_9 + H_3 F'_7 + H_5 F'_5 + H_7 F'_3 + H_9 F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^9 (10F_1 F_9 + 10F_3 F_7 + 5F_5^2) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^9 \left(2G_1 G_9 + 2G_3 G_7 + G_5^2 - \frac{2G_1 G_7}{3} - \frac{2G_3 G_5}{3} - \frac{2G_1 G_5}{45} - \frac{G_3^2}{45} - \right. \\ &\quad \left. \frac{4G_1 G_3}{945} - \frac{G_1^2}{4725} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^9 F''_9 \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^9 F'_9.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\nu F''_9 + \nu' F'_9 - H_1 F'_9 - H_9 F'_1 - 10F_1 F_9 + 2G_1 G_9 &= H_3 F'_7 + H_5 F'_5 + H_7 F'_3 + \\ 10F_3 F_7 + 5F_5^2 - 2G_3 G_7 - G_5^2 + \frac{2G_1 G_7}{3} + \frac{2G_3 G_5}{3} + \frac{2G_1 G_5}{45} + \frac{G_3^2}{45} + \frac{4G_1 G_3}{945} + \\ \frac{G_1^2}{4725}.\end{aligned}$$

5.6.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^9 (H_1 G'_9 + H_3 G'_7 + H_5 G'_5 + H_7 G'_3 + H_9 G'_1) \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^9 (9F_1 G_9 + 7F_3 G_7 + 5F_5 G_5 + 3F_7 G_3 + F_9 G_1) \\ \cot \theta FG &= \theta^9 \left(F_1 G_9 + F_3 G_7 + F_5 G_5 + F_7 G_3 + F_9 G_1 - \frac{F_1 G_7}{3} - \frac{F_3 G_5}{3} - \frac{F_5 G_3}{3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{F_7 G_1}{3} - \frac{F_1 G_5}{45} - \frac{F_3 G_3}{45} - \frac{F_5 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_3}{945} - \frac{2F_3 G_1}{945} - \frac{F_1 G_1}{4725} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^9 G''_9 \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^9 G'_9. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu G''_9 + \nu' G'_9 - H_1 G'_9 - H_9 G'_1 - 10F_1 G_9 - 2F_9 G_1 &= H_3 G'_7 + H_5 G'_5 + H_7 G'_3 + \\ 8F_3 G_7 + 6F_5 G_5 + 4F_7 G_3 - \frac{F_1 G_7}{3} - \frac{F_3 G_5}{3} - \frac{F_5 G_3}{3} - \frac{F_7 G_1}{3} - \frac{F_1 G_5}{45} - \\ \frac{F_3 G_3}{45} - \frac{F_5 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_3}{945} - \frac{2F_3 G_1}{945} - \frac{F_1 G_1}{4725}. \end{aligned}$$

5.6.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^9 C_9'' \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^9 C_9' \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^9 (H_1 C_9' + H_3 C_7' + H_5 C_5' + H_7 C_3' + H_9 C_1') \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^9 (8F_1 C_9 + 6F_3 C_7 + 4F_5 C_5 + 2F_7 C_3).\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu} C_9'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_9' - Sc(H_1 C_9' + H_9 C_1' + 8F_1 C_9) &= Sc(H_3 C_7' + H_5 C_5' + H_7 C_3' \\ &+ 6F_3 C_7 + 4F_5 C_5 + 2F_7 C_3).\end{aligned}$$

5.7 Sexto sistema (Para θ^{10} e θ^{11})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{10} e θ^{11} é dado por:

$$\begin{aligned}H_{11}' + 12F_{11} &= \frac{2F_1}{93555} + \frac{F_3}{4725} + \frac{2F_5}{945} + \frac{F_7}{45} + \frac{F_9}{3} \\ \nu F_{11}'' + \nu' F_{11}' - H_1 F_{11}' - H_{11} F_1' - 12F_1 F_{11} + 2G_1 G_{11} &= H_3 F_9' + H_5 F_7' + H_7 F_5' + \\ &H_9 F_3' + 12F_3 F_9 + 12F_5 F_7 - 2G_3 G_9 - 2G_5 G_7 + \frac{2G_1 G_9}{3} + \frac{2G_3 G_7}{3} + \frac{G_5^2}{3} + \\ &\frac{2G_1 G_7}{45} + \frac{2G_3 G_5}{45} + \frac{4G_1 G_5}{945} + \frac{2G_3^2}{945} + \frac{2G_1 G_3}{4725} + \frac{2G_1^2}{93555} \\ \nu G_{11}'' + \nu' G_{11}' - H_1 G_{11}' - H_{11} G_1' - 12F_1 G_{11} - 2F_{11} G_1 &= H_3 G_9' + H_5 G_7' + H_7 G_5' + \\ &H_9 G_3' + 4F_9 G_3 + 6F_7 G_5 + 8F_5 G_7 + 10F_3 G_9 - \frac{F_1 G_9}{3} - \frac{F_3 G_7}{3} - \frac{F_5 G_5}{3} - \\ &\frac{F_7 G_3}{3} - \frac{F_9 G_1}{3} - \frac{F_1 G_7}{45} - \frac{F_3 G_5}{45} - \frac{F_5 G_3}{45} - \frac{F_7 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_5}{945} - \frac{2F_3 G_3}{945} - \\ &\frac{2F_5 G_1}{945} - \frac{F_1 G_3}{4725} - \frac{F_3 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_1}{93555} \\ \frac{1}{\nu} C_{11}'' - \frac{\nu'}{\nu^2} C_{11}' - Sc(H_1 C_{11}' + H_{11} C_1' + 10F_1 C_{11}) &= Sc(H_3 C_9' + H_5 C_7' + H_7 C_5' + \\ &H_9 C_3' + 8F_3 C_9 + 6F_5 C_7 + 4F_7 C_5 + 2F_9 C_3).\end{aligned}$$

As Subseções 5.7.1 a 5.7.4 mostram o desenvolvimento das equações do sexto sistema.

5.7.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^{10} H'_{11} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 11\theta^{10} F_{11} \\ \cot \theta F &= \theta^{10} \left(F_{11} - \frac{F_9}{3} - \frac{F_7}{45} - \frac{2F_5}{945} - \frac{F_3}{4725} - \frac{2F_1}{93555} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_{11} + 12F_{11} = \frac{2F_1}{93555} + \frac{F_3}{4725} + \frac{2F_5}{945} + \frac{F_7}{45} + \frac{F_9}{3}.$$

5.7.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^{11} (H_1 F'_{11} + H_3 F'_9 + H_5 F'_7 + H_7 F'_5 + H_9 F'_3 + H_{11} F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^{11} (12F_1 F_{11} + 12F_3 F_9 + 12F_5 F_7) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^{11} \left(2G_1 G_{11} + 2G_3 G_9 + 2G_5 G_7 - \frac{2G_1 G_9}{3} - \frac{2G_3 G_7}{3} - \frac{G_5^2}{3} - \frac{2G_1 G_7}{45} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2G_3 G_5}{45} - \frac{4G_1 G_5}{945} - \frac{2G_3^2}{945} - \frac{2G_1 G_3}{4725} - \frac{2G_1^2}{93555} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{11} F''_{11} \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{11} F'_{11}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu F''_{11} + \nu' F'_{11} - H_1 F'_{11} - H_{11} F'_1 - 12 F_1 F_{11} + 2 G_1 G_{11} &= H_3 F'_9 + H_5 F'_7 + H_7 F'_5 + \\ H_9 F'_3 + 12 F_3 F_9 + 12 F_5 F_7 - 2 G_3 G_9 - 2 G_5 G_7 + \frac{2 G_1 G_9}{3} + \frac{2 G_3 G_7}{3} + \frac{G_5^2}{3} + \\ \frac{2 G_1 G_7}{45} + \frac{2 G_3 G_5}{45} + \frac{4 G_1 G_5}{945} + \frac{2 G_3^2}{945} + \frac{2 G_1 G_3}{4725} + \frac{2 G_1^2}{93555}. \end{aligned}$$

5.7.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^{11} (H_1 G'_{11} + H_3 G'_9 + H_5 G'_7 + H_7 G'_5 + H_9 G'_3 + H_{11} G'_1) \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^{11} (11 F_1 G_{11} + 9 F_3 G_9 + 7 F_5 G_7 + 5 F_7 G_5 + 3 F_9 G_3 + F_{11} G_1) \\ \cot \theta F G &= \theta^{11} \left(F_1 G_{11} + F_3 G_9 + F_5 G_7 + F_7 G_5 + F_9 G_3 + F_{11} G_1 - \frac{F_1 G_9}{3} - \right. \\ &\quad \frac{F_3 G_7}{3} - \frac{F_5 G_5}{3} - \frac{F_7 G_3}{3} - \frac{F_9 G_1}{3} - \frac{F_1 G_7}{45} - \frac{F_3 G_5}{45} - \frac{F_5 G_3}{45} - \\ &\quad \left. \frac{F_7 G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_5}{945} - \frac{2 F_3 G_3}{945} - \frac{2 F_5 G_1}{945} - \frac{F_1 G_3}{4725} - \frac{F_3 G_1}{4725} - \frac{2 F_1 G_1}{93555} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{11} G''_{11} \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{11} G'_{11}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu G''_{11} + \nu' G'_{11} - H_1 G'_{11} - H_{11} G'_1 - 12 F_1 G_{11} - 2 F_{11} G_1 &= H_3 G'_9 + H_5 G'_7 + \\ H_7 G'_5 + H_9 G'_3 + 4 F_9 G_3 + 6 F_7 G_5 + 8 F_5 G_7 + 10 F_3 G_9 - \frac{F_1 G_9}{3} - \frac{F_3 G_7}{3} - \\ \frac{F_5 G_5}{3} - \frac{F_7 G_3}{3} - \frac{F_9 G_1}{3} - \frac{F_1 G_7}{45} - \frac{F_3 G_5}{45} - \frac{F_5 G_3}{45} - \frac{F_7 G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_5}{945} - \\ \frac{2 F_3 G_3}{945} - \frac{2 F_5 G_1}{945} - \frac{F_1 G_3}{4725} - \frac{F_3 G_1}{4725} - \frac{2 F_1 G_1}{93555}. \end{aligned}$$

5.7.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\nu} \theta^{11} C''_{11}$$

$$\frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^{11} C'_{11}$$

$$ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} = Sc\theta^{11} (H_1 C'_{11} + H_3 C'_9 + H_5 C'_7 + H_7 C'_5 + H_9 C'_3 + H_{11} C'_1)$$

$$ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = Sc\theta^{11} (10F_1 C_{11} + 8F_3 C_9 + 6F_5 C_7 + 4F_7 C_5 + 2F_9 C_3).$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} C''_{11} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{11} - Sc(H_1 C'_{11} + H_{11} C'_1 + 10F_1 C_{11}) &= Sc(H_3 C'_9 + H_5 C'_7 + H_7 C'_5 \\ &+ H_9 C'_3 + 8F_3 C_9 + 6F_5 C_7 + 4F_7 C_5 + 2F_9 C_3). \end{aligned}$$

5.8 Sétimo sistema (Para θ^{12} e θ^{13})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{12} e θ^{13} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{13} + 14F_{13} &= \frac{1382F_1}{638512875} + \frac{2F_3}{93555} + \frac{F_5}{4725} + \frac{2F_7}{945} + \frac{F_9}{45} + \frac{F_{11}}{3} \\
\nu F''_{13} + \nu' F'_{13} - H_1 F'_{13} - H_{13} F'_1 - 14F_1 F_{13} + 2G_1 G_{13} &= H_3 F'_{11} + H_5 F'_9 + H_7 F'_7 + \\
&H_9 F'_5 + H_{11} F'_3 + 14F_3 F_{11} + 14F_5 F_9 + 7F_7^2 - 2G_3 G_{11} - 2G_5 G_9 - G_7^2 + \\
&\frac{2G_1 G_{11}}{3} + \frac{2G_3 G_9}{3} + \frac{2G_5 G_7}{3} + \frac{2G_1 G_9}{45} + \frac{2G_3 G_7}{45} + \frac{G_5^2}{45} + \frac{4G_1 G_7}{945} + \frac{4G_3 G_5}{945} + \\
&\frac{2G_1 G_5}{4725} + \frac{G_3^2}{4725} + \frac{4G_1 G_3}{93555} + \frac{1382G_1^2}{638512875} \\
\nu G''_{13} + \nu' G'_{13} - H_1 G'_{13} - H_{13} G'_1 - 14F_1 G_{13} - 2F_{13} G_1 &= H_3 G'_{11} + H_5 G'_9 + H_7 G'_7 + \\
&H_9 G'_5 + H_{11} G'_3 + 12F_3 G_{11} + 10F_5 G_9 + 8F_7 G_7 + 6F_9 G_5 + 4F_{11} G_3 - \frac{F_1 G_{11}}{3} - \\
&\frac{F_3 G_9}{3} - \frac{F_5 G_7}{3} - \frac{F_7 G_5}{3} - \frac{F_9 G_3}{3} - \frac{F_{11} G_1}{3} - \frac{F_1 G_9}{45} - \frac{F_3 G_7}{45} - \frac{F_5 G_5}{45} - \frac{F_7 G_3}{45} - \\
&\frac{F_9 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_7}{945} - \frac{2F_3 G_5}{945} - \frac{2F_5 G_3}{945} - \frac{2F_7 G_1}{945} - \frac{F_1 G_5}{4725} - \frac{F_3 G_3}{4725} - \frac{F_5 G_1}{4725} - \\
&\frac{2F_1 G_3}{93555} - \frac{2F_3 G_1}{93555} - \frac{1382F_1 G_1}{638512875} \\
\frac{1}{\nu} C''_{13} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{13} - Sc(H_1 C'_{13} + H_{13} C'_1 + 12F_1 C_{13}) &= Sc(H_3 C'_{11} + H_5 C'_9 + H_7 C'_7 + \\
&H_9 C'_5 + H_{11} C'_3 + 10F_3 C_{11} + 8F_5 C_9 + 6F_7 C_7 + 4F_9 C_5 + 2F_{11} C_3).
\end{aligned}$$

As Subseções 5.8.1 a 5.8.4 mostram o desenvolvimento das equações do sétimo sistema.

5.8.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^{12} H'_{13} \\
\frac{\partial F}{\partial \theta} &= 13\theta^{12} F_{13} \\
\cot \theta F &= \theta^{12} \left(F_{13} - \frac{F_{11}}{3} - \frac{F_9}{45} - \frac{2F_7}{945} - \frac{F_5}{4725} - \frac{2F_3}{93555} - \frac{1382F_1}{638512875} \right).
\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_{13} + 14F_{13} = \frac{1382F_1}{638512875} + \frac{2F_3}{93555} + \frac{F_5}{4725} + \frac{2F_7}{945} + \frac{F_9}{45} + \frac{F_{11}}{3}.$$

5.8.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^{13} (H_1 F'_{13} + H_3 F'_{11} + H_5 F'_9 + H_7 F'_7 + H_9 F'_5 + H_{11} F'_3 + H_{13} F_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^{13} (14F_1 F_{13} + 14F_3 F_{11} + 14F_5 F_9 + 7F_7^2) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^{13} \left(2G_1 G_{13} + 2G_3 G_{11} + 2G_5 G_9 + G_7^2 - \frac{2G_1 G_{11}}{3} - \frac{2G_3 G_9}{3} - \frac{2G_5 G_7}{3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2G_1 G_9}{45} - \frac{2G_3 G_7}{45} - \frac{G_5^2}{45} - \frac{4G_1 G_7}{945} - \frac{4G_3 G_5}{945} - \frac{2G_1 G_5}{4725} - \frac{G_3^2}{4725} - \frac{4G_1 G_3}{93555} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1382G_1^2}{638512875} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{13} F''_{13} \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{13} F'_{13}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu F''_{13} + \nu' F'_{13} - H_1 F'_{13} - H_{13} F'_1 - 14F_1 F_{13} + 2G_1 G_{13} &= H_3 F'_{11} + H_5 F'_9 + H_7 F'_7 + \\ H_9 F'_5 + H_{11} F'_3 + 14F_3 F_{11} + 14F_5 F_9 + 7F_7^2 - 2G_3 G_{11} - 2G_5 G_9 - G_7^2 &+ \frac{2G_1 G_{11}}{3} + \\ \frac{2G_3 G_9}{3} + \frac{2G_5 G_7}{3} + \frac{2G_1 G_9}{45} + \frac{2G_3 G_7}{45} + \frac{G_5^2}{45} + \frac{4G_1 G_7}{945} + \frac{4G_3 G_5}{945} + \frac{2G_1 G_5}{4725} &+ \\ \frac{G_3^2}{4725} + \frac{4G_1 G_3}{93555} + \frac{1382G_1^2}{638512875}. \end{aligned}$$

5.8.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^{13} (H_1 G'_{13} + H_3 G'_{11} + H_5 G'_9 + H_7 G'_7 + H_9 G'_5 + H_{11} G'_3 + H_{13} G'_1) \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^{13} (13F_1 G_{13} + 11F_3 G_{11} + 9F_5 G_9 + 7F_7 G_7 + 5F_9 G_5 + 3F_{11} G_3 + F_{13} G_1) \\ \cot \theta FG &= \theta^{13} \left(F_1 G_{13} + F_3 G_{11} + F_5 G_9 + F_7 G_7 + F_9 G_5 + F_{11} G_3 + F_{13} G_1 - \frac{F_1 G_{11}}{3} - \right. \\ &\quad \frac{F_3 G_9}{3} - \frac{F_5 G_7}{3} - \frac{F_7 G_5}{3} - \frac{F_9 G_3}{3} - \frac{F_{11} G_1}{3} - \frac{F_1 G_9}{45} - \frac{F_3 G_7}{45} - \frac{F_5 G_5}{45} - \\ &\quad \frac{F_7 G_3}{45} - \frac{F_9 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_7}{945} - \frac{2F_3 G_5}{945} - \frac{2F_5 G_3}{945} - \frac{2F_7 G_1}{945} - \frac{F_1 G_5}{4725} - \frac{F_3 G_3}{4725} - \\ &\quad \left. \frac{F_5 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_3}{93555} - \frac{2F_3 G_1}{93555} - \frac{1382F_1 G_1}{638512875} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{13} G''_{13} \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{13} G'_{13}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu G''_{13} + \nu' G'_{13} - H_1 G'_{13} - H_{13} G'_1 - 14F_1 G_{13} - 2F_{13} G_1 &= H_3 G'_{11} + H_5 G'_9 + H_7 G'_7 \\ &+ H_9 G'_5 + H_{11} G'_3 + 12F_3 G_{11} + 10F_5 G_9 + 8F_7 G_7 + 6F_9 G_5 + 4F_{11} G_3 - \frac{F_1 G_{11}}{3} - \\ &\frac{F_3 G_9}{3} - \frac{F_5 G_7}{3} - \frac{F_7 G_5}{3} - \frac{F_9 G_3}{3} - \frac{F_{11} G_1}{3} - \frac{F_1 G_9}{45} - \frac{F_3 G_7}{45} - \frac{F_5 G_5}{45} - \frac{F_7 G_3}{45} - \\ &\frac{F_9 G_1}{45} - \frac{2F_1 G_7}{945} - \frac{2F_3 G_5}{945} - \frac{2F_5 G_3}{945} - \frac{2F_7 G_1}{945} - \frac{F_1 G_5}{4725} - \frac{F_3 G_3}{4725} - \frac{F_5 G_1}{4725} - \\ &\frac{2F_1 G_3}{93555} - \frac{2F_3 G_1}{93555} - \frac{1382F_1 G_1}{638512875}. \end{aligned}$$

5.8.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\nu} \theta^{13} C''_{13}$$

$$\frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} = \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^{13} C'_{13}$$

$$ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} = Sc\theta^{13} (H_1 C'_{13} + H_3 C'_{11} + H_5 C'_9 + H_7 C'_7 + H_9 C'_5 + H_{11} C'_3 + H_{13} C'_1)$$

$$ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = Sc\theta^{13} (12F_1 C_{13} + 10F_3 C_{11} + 8F_5 C_9 + 6F_7 C_7 + 4F_9 C_5 + 2F_{11} C_3).$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} C''_{13} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{13} - Sc(H_1 C'_{13} + H_{13} C'_1 + 12F_1 C_{13}) &= Sc(H_3 C'_{11} + H_5 C'_9 + H_7 C'_7 \\ &+ H_9 C'_5 + H_{11} C'_3 + 10F_3 C_{11} + 8F_5 C_9 + 6F_7 C_7 + 4F_9 C_5 + 2F_{11} C_3). \end{aligned}$$

5.9 Oitavo sistema (Para θ^{14} e θ^{15})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{14} e θ^{15} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{15} + 16F_{15} &= \frac{4F_1}{18243225} + \frac{1382F_3}{638512875} + \frac{2F_5}{93555} + \frac{F_7}{4725} + \frac{2F_9}{945} + \frac{F_{11}}{45} + \frac{F_{13}}{3} \\
\nu F''_{15} + \nu' F'_{15} - H_1 F'_{15} - H_{15} F'_1 - 16F_1 F_{15} + 2G_1 G_{15} &= H_3 F'_{13} + H_5 F'_{11} + H_7 F'_9 + \\
&H_9 F'_7 + H_{11} F'_5 + H_{13} F'_3 + 16F_3 F_{13} + 16F_5 F_{11} + 16F_7 F_9 - 2G_3 G_{13} - 2G_5 G_{11} - \\
&2G_7 G_9 + \frac{2G_1 G_{13}}{3} + \frac{2G_3 G_{11}}{3} + \frac{2G_5 G_9}{3} + \frac{G_7^2}{3} + \frac{2G_1 G_{11}}{45} + \frac{2G_3 G_9}{45} + \frac{2G_5 G_7}{45} + \\
&\frac{4G_1 G_9}{945} + \frac{4G_3 G_7}{945} + \frac{2G_5^2}{945} + \frac{2G_1 G_7}{4725} + \frac{2G_3 G_5}{4725} + \frac{4G_1 G_5}{93555} + \frac{2G_3^2}{93555} + \\
&\frac{2764G_1 G_3}{638512875} + \frac{4G_1^2}{18243225} \\
\nu G''_{15} + \nu' G'_{15} - H_1 G'_{15} - H_{15} G'_1 - 16F_1 G_{15} - 2F_{15} G_1 &= H_3 G'_{13} + H_5 G'_{11} + H_7 G'_9 + \\
&H_9 G'_7 + H_{11} G'_5 + H_{13} G'_3 + 14F_3 G_{13} + 12F_5 G_{11} + 10F_7 G_9 + 8F_9 G_7 + 6F_{11} G_5 + \\
&4F_{13} G_3 - \frac{F_1 G_{13}}{3} - \frac{F_3 G_{11}}{3} - \frac{F_5 G_9}{3} - \frac{F_7 G_7}{3} - \frac{F_9 G_5}{3} - \frac{F_{11} G_3}{3} - \frac{F_{13} G_1}{3} - \\
&\frac{F_1 G_{11}}{45} - \frac{F_3 G_9}{45} - \frac{F_5 G_7}{45} - \frac{F_7 G_5}{45} - \frac{F_9 G_3}{45} - \frac{F_{11} G_1}{45} - \frac{2F_1 G_9}{945} - \frac{2F_3 G_7}{945} - \\
&\frac{2F_5 G_5}{945} - \frac{2F_7 G_3}{945} - \frac{2F_9 G_1}{945} - \frac{F_1 G_7}{4725} - \frac{F_3 G_5}{4725} - \frac{F_5 G_3}{4725} - \frac{F_7 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_5}{93555} - \\
&\frac{2F_3 G_3}{93555} - \frac{2F_5 G_1}{93555} - \frac{1382F_1 G_3}{638512875} - \frac{1382F_3 G_1}{638512875} - \frac{4F_1 G_1}{18243225} \\
\frac{1}{\nu} C''_{15} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{15} - Sc(H_1 C'_{15} + H_{15} C'_1 + 14F_1 C_{15}) &= Sc(H_3 C'_{13} + H_5 C'_{11} + H_7 C'_9 + \\
&H_9 C'_7 + H_{11} C'_5 + H_{13} C'_3 + 12F_3 C_{13} + 10F_5 C_{11} + 8F_7 C_9 + 6F_9 C_7 + 4F_{11} C_5 + \\
&2F_{13} C_3).
\end{aligned}$$

As Subseções 5.9.1 a 5.9.4 mostram o desenvolvimento das equações do oitavo sistema.

5.9.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^{14} H'_{15} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 15\theta^{14} F_{15} \\ \cot \theta F &= \theta^{14} \left(F_{15} - \frac{F_{13}}{3} - \frac{F_{11}}{45} - \frac{2F_9}{945} - \frac{F_7}{4725} - \frac{2F_5}{93555} - \frac{1382F_3}{638512875} - \frac{4F_1}{18243225} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$H'_{15} + 16F_{15} = \frac{4F_1}{18243225} + \frac{1382F_3}{638512875} + \frac{2F_5}{93555} + \frac{F_7}{4725} + \frac{2F_9}{945} + \frac{F_{11}}{45} + \frac{F_{13}}{3}.$$

5.9.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^{15} (H_1 F'_{15} + H_3 F'_{13} + H_5 F'_{11} + H_7 F'_9 + H_9 F'_7 + H_{11} F'_5 + H_{13} F'_3 + H_{15} F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^{15} (16F_1 F_{15} + 16F_3 F_{13} + 16F_5 F_{11} + 16F_7 F_9) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^{15} \left(2G_1 G_{15} + 2G_3 G_{13} + 2G_5 G_{11} + 2G_7 G_9 - \frac{2G_1 G_{13}}{3} - \frac{2G_3 G_{11}}{3} - \right. \\ &\quad \frac{2G_5 G_9}{3} - \frac{G_7^2}{3} - \frac{2G_1 G_{11}}{45} - \frac{2G_3 G_9}{45} - \frac{2G_5 G_7}{45} - \frac{4G_1 G_9}{945} - \frac{4G_3 G_7}{945} - \frac{2G_5^2}{945} - \\ &\quad \left. \frac{2G_1 G_7}{4725} - \frac{2G_3 G_5}{4725} - \frac{4G_1 G_5}{93555} - \frac{2G_3^2}{93555} - \frac{2764G_1 G_3}{638512875} - \frac{4G_1^2}{18243225} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{15} F''_{15} \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{15} F'_{15}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu F''_{15} + \nu' F'_{15} - H_1 F'_{15} - H_{15} F'_1 - 16 F_1 F_{15} + 2 G_1 G_{15} = & H_3 F'_{13} + H_5 F'_{11} + H_7 F'_9 + \\ & H_9 F'_7 + H_{11} F'_5 + H_{13} F'_3 + 16 F_3 F_{13} + 16 F_5 F_{11} + 16 F_7 F_9 - 2 G_3 G_{13} - 2 G_5 G_{11} - \\ & 2 G_7 G_9 + \frac{2 G_1 G_{13}}{3} + \frac{2 G_3 G_{11}}{3} + \frac{2 G_5 G_9}{3} + \frac{G_7^2}{3} + \frac{2 G_1 G_{11}}{45} + \frac{2 G_3 G_9}{45} + \frac{2 G_5 G_7}{45} + \\ & \frac{4 G_1 G_9}{945} + \frac{4 G_3 G_7}{945} + \frac{2 G_5^2}{945} + \frac{2 G_1 G_7}{4725} + \frac{2 G_3 G_5}{4725} + \frac{4 G_1 G_5}{93555} + \frac{2 G_3^2}{93555} + \\ & \frac{2764 G_1 G_3}{638512875} + \frac{4 G_1^2}{18243225}. \end{aligned}$$

5.9.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^{15} (H_1 G'_{15} + H_3 G'_{13} + H_5 G'_{11} + H_7 G'_9 + H_9 G'_7 + H_{11} G'_5 + H_{13} G'_3 + \\ &\quad H_{15} F'_1) \\ F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^{15} (15 F_1 G_{15} + 13 F_3 G_{13} + 11 F_5 G_{11} + 9 F_7 G_9 + 7 F_9 G_7 + 5 F_{11} G_5 + \\ &\quad 3 F_{13} G_3 + F_{15} G_1) \\ \cot \theta F G &= \theta^{15} (F_1 G_{15} + F_3 G_{13} + F_5 G_{11} + F_7 G_9 + F_9 G_7 + F_{11} G_5 + F_{13} G_3 + \\ &\quad F_{15} G_1 - \frac{F_1 G_{13}}{3} - \frac{F_3 G_{11}}{3} - \frac{F_5 G_9}{3} - \frac{F_7 G_7}{3} - \frac{F_9 G_5}{3} - \frac{F_{11} G_3}{3} - \frac{F_{13} G_1}{3} - \\ &\quad \frac{F_1 G_{11}}{45} - \frac{F_3 G_9}{45} - \frac{F_5 G_7}{45} - \frac{F_7 G_5}{45} - \frac{F_9 G_3}{45} - \frac{F_{11} G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_9}{945} - \frac{2 F_3 G_7}{945} - \\ &\quad \frac{2 F_5 G_5}{945} - \frac{2 F_7 G_3}{945} - \frac{2 F_9 G_1}{945} - \frac{F_1 G_7}{4725} - \frac{F_3 G_5}{4725} - \frac{F_5 G_3}{4725} - \frac{F_7 G_1}{4725} - \frac{2 F_1 G_5}{93555} - \\ &\quad \frac{2 F_3 G_3}{93555} - \frac{2 F_5 G_1}{93555} - \frac{1382 F_1 G_3}{638512875} - \frac{1382 F_3 G_1}{638512875} - \frac{4 F_1 G_1}{18243225}) \\ \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{15} G''_{15} \\ \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{15} G'_{15}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \nu G''_{15} + \nu' G'_{15} - H_1 G'_{15} - H_{15} G'_1 - 16F_1 G_{15} - 2F_{15} G_1 = H_3 G'_{13} + H_5 G'_{11} + \\ & H_7 G'_9 + H_9 G'_7 + H_{11} G'_5 + H_{13} G'_3 + 14F_3 G_{13} + 12F_5 G_{11} + 10F_7 G_9 + 8F_9 G_7 + \\ & 6F_{11} G_5 + 4F_{13} G_3 - \frac{F_1 G_{13}}{3} - \frac{F_3 G_{11}}{3} - \frac{F_5 G_9}{3} - \frac{F_7 G_7}{3} - \frac{F_9 G_5}{3} - \frac{F_{11} G_3}{3} - \frac{F_{13} G_1}{3} - \\ & \frac{F_1 G_{11}}{45} - \frac{F_3 G_9}{45} - \frac{F_5 G_7}{45} - \frac{F_7 G_5}{45} - \frac{F_9 G_3}{45} - \frac{F_{11} G_1}{45} - \frac{2F_1 G_9}{945} - \frac{2F_3 G_7}{945} - \frac{2F_5 G_5}{945} - \\ & \frac{2F_7 G_3}{945} - \frac{2F_9 G_1}{945} - \frac{F_1 G_7}{4725} - \frac{F_3 G_5}{4725} - \frac{F_5 G_3}{4725} - \frac{F_7 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_5}{93555} - \frac{2F_3 G_3}{93555} - \frac{2F_5 G_1}{93555} - \\ & \frac{1382F_1 G_3}{638512875} - \frac{1382F_3 G_1}{638512875} - \frac{4F_1 G_1}{18243225}. \end{aligned}$$

5.9.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^{15} C''_{15} \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^{15} C'_{15} \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^{15} (H_1 C'_{15} + H_3 C'_{13} + H_5 C'_{11} + H_7 C'_9 + H_9 C'_7 + H_{11} C'_5 + H_{13} C'_3 + \\ & H_{15} C'_1) \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= Sc\theta^{15} (14F_1 C_{15} + 12F_3 C_{13} + 10F_5 C_{11} + 8F_7 C_9 + 6F_9 C_7 + 4F_{11} C_5 + \\ & 2F_{13} C_3). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} C''_{15} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{15} - Sc(H_1 C'_{15} + H_{15} C'_1 + 14F_1 C_{15}) = Sc(H_3 C'_{13} + H_5 C'_{11} + H_7 C'_9 \\ & + H_9 C'_7 + H_{11} C'_5 + H_{13} C'_3 + 12F_3 C_{13} + 10F_5 C_{11} + 8F_7 C_9 + 6F_9 C_7 + 4F_{11} C_5 + \\ & 2F_{13} C_3). \end{aligned}$$

5.10 Nono sistema (Para θ^{16} e θ^{17})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{16} e θ^{17} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{17} + 18F_{17} &= \frac{3671F_1}{162820783125} + \frac{4F_3}{18243225} + \frac{1382F_5}{638512875} + \frac{2F_7}{93555} + \frac{F_9}{4725} + \frac{2F_{11}}{945} + \\
&\quad \frac{F_{13}}{45} + \frac{F_{15}}{3} \\
\nu F''_{17} + \nu' F'_{17} - H_1 F'_{17} - H_{17} F'_1 - 18F_1 F_{17} + 2G_1 G_{17} &= H_3 F'_{15} + H_5 F'_{13} + H_7 F'_{11} + \\
&\quad H_9 F'_9 + H_{11} F'_7 + H_{13} F'_5 + H_{15} F'_3 + 18F_3 F_{15} + 18F_5 F_{13} + 18F_7 F_{11} + 9F_9^2 - \\
&\quad 2G_3 G_{15} - 2G_5 G_{13} - 2G_7 G_{11} - G_9^2 + \frac{2G_1 G_{15}}{3} + \frac{2G_3 G_{13}}{3} + \frac{2G_5 G_{11}}{3} + \frac{2G_7 G_9}{3} + \\
&\quad \frac{2G_1 G_{13}}{45} + \frac{2G_3 G_{11}}{45} + \frac{2G_5 G_9}{45} + \frac{G_7^2}{45} + \frac{4G_1 G_{11}}{945} + \frac{4G_3 G_9}{945} + \frac{4G_5 G_7}{945} + \frac{2G_1 G_9}{4725} + \\
&\quad \frac{2G_3 G_7}{4725} + \frac{G_5^2}{4725} + \frac{4G_1 G_7}{93555} + \frac{4G_3 G_5}{93555} + \frac{2764G_1 G_5}{638512875} + \frac{1382G_3^2}{638512875} + \frac{8G_1 G_3}{18243225} + \\
&\quad \frac{3617G_1^2}{162820783125} \\
\nu G''_{17} + \nu' G'_{17} - H_1 G'_{17} - H_{17} G'_1 - 18F_1 G_{17} - 2F_{17} G_1 &= H_3 G'_{15} + H_5 G'_{13} + H_7 G'_{11} + \\
&\quad H_9 G'_9 + H_{11} G'_7 + H_{13} G'_5 + H_{15} G'_3 + 16F_3 G_{15} + 14F_5 G_{13} + 12F_7 G_{11} + 10F_9 G_9 + \\
&\quad 8F_{11} G_7 + 6F_{13} G_5 + 4F_{15} G_3 - \frac{F_1 G_{15}}{3} - \frac{F_3 G_{13}}{3} - \frac{F_5 G_{11}}{3} - \frac{F_7 G_9}{3} - \frac{F_9 G_7}{3} - \\
&\quad \frac{F_{11} G_5}{3} - \frac{F_{13} G_3}{3} - \frac{F_{15} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{13}}{45} - \frac{F_3 G_{11}}{45} - \frac{F_5 G_9}{45} - \frac{F_7 G_7}{45} - \frac{F_9 G_5}{45} - \\
&\quad \frac{F_{11} G_3}{45} - \frac{F_{13} G_1}{45} - \frac{2F_1 G_{11}}{945} - \frac{2F_3 G_9}{945} - \frac{2F_5 G_7}{945} - \frac{2F_7 G_5}{945} - \frac{2F_9 G_3}{945} - \frac{2F_{11} G_1}{945} - \\
&\quad \frac{F_1 G_9}{4725} - \frac{F_3 G_7}{4725} - \frac{F_5 G_5}{4725} - \frac{F_7 G_3}{4725} - \frac{F_9 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_7}{93555} - \frac{2F_3 G_5}{93555} - \frac{2F_5 G_3}{93555} - \\
&\quad \frac{2F_7 G_1}{93555} - \frac{1382F_1 G_5}{638512875} - \frac{1382F_3 G_3}{638512875} - \frac{1382F_5 G_1}{638512875} - \frac{4F_1 G_3}{18243225} - \frac{4F_3 G_1}{18243225} - \\
&\quad \frac{3617F_1 G_1}{162820783125} \\
\frac{1}{\nu} C''_{17} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{17} - Sc(H_1 C'_{17} + H_{17} C'_1 + 16F_1 C_{17}) &= Sc(H_3 C'_{15} + H_5 C'_{13} + H_7 C'_{11} + \\
&\quad H_9 C'_9 + H_{11} C'_7 + H_{13} C'_5 + H_{15} C'_3 + 14F_3 C_{15} + 12F_5 C_{13} + 10F_7 C_{11} + 8F_9 C_9 + \\
&\quad 6F_{11} C_7 + 4F_{13} C_5 + 2F_{15} C_3).
\end{aligned}$$

As Subseções 5.10.1 a 5.10.4 mostram o desenvolvimento das equações do nono sistema.

5.10.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^{16} H'_{17} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 17\theta^{16} F_{17} \\ \cot \theta F &= \theta^{16} \left(F_{17} - \frac{F_{15}}{3} - \frac{F_{13}}{45} - \frac{2F_{11}}{945} - \frac{F_9}{4725} - \frac{2F_7}{93555} - \frac{1382F_5}{638512875} - \frac{4F_3}{18243225} - \frac{3617F_1}{162820783125} \right).\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}H'_{17} + 18F_{17} &= \frac{3671F_1}{162820783125} + \frac{4F_3}{18243225} + \frac{1382F_5}{638512875} + \frac{2F_7}{93555} + \frac{F_9}{4725} + \\ &\frac{2F_{11}}{945} + \frac{F_{13}}{45} + \frac{F_{15}}{3}.\end{aligned}$$

5.10.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^{17} (H_1 F'_{17} + H_3 F'_{15} + H_5 F'_{13} + H_7 F'_{11} + H_9 F'_9 + H_{11} F'_7 + H_{13} F'_5 + \\ &H_{15} F'_3 + H_{17} F'_1) \\ F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^{17} (18F_1 F_{17} + 18F_3 F_{15} + 18F_5 F_{13} + 18F_7 F_{11} + 9F_9^2) \\ \cot \theta G^2 &= \theta^{17} \left(2G_1 G_{17} + 2G_3 G_{15} + 2G_5 G_{13} + 2G_7 G_{11} + G_9^2 - \frac{2G_1 G_{15}}{3} - \frac{2G_3 G_{13}}{3} - \frac{2G_5 G_{11}}{3} - \frac{2G_7 G_9}{3} - \frac{2G_1 G_{13}}{45} - \frac{2G_3 G_{11}}{45} - \frac{2G_5 G_9}{45} - \frac{G_7^2}{45} - \frac{4G_1 G_{11}}{945} - \frac{4G_3 G_9}{945} - \frac{4G_5 G_7}{945} - \frac{2G_1 G_9}{4725} - \frac{2G_3 G_7}{4725} - \frac{2G_5^2}{4725} - \frac{4G_1 G_7}{93555} - \frac{4G_5 G_3}{93555} - \frac{2764G_1 G_5}{638512875} - \frac{1382G_3^2}{638512875} - \frac{8G_1 G_3}{18243225} - \frac{3617G_1^2}{162820783125} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{17} F''_{17} \\ \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{17} F'_{17}.\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \nu F''_{17} + \nu' F'_{17} - H_1 F'_{17} - H_{17} F'_1 - 18 F_1 F_{17} + 2 G_1 G_{17} = & H_3 F'_{15} + H_5 F'_{13} + H_7 F'_{11} + \\ & H_9 F'_9 + H_{11} F'_7 + H_{13} F'_5 + H_{15} F'_3 + 18 F_3 F_{15} + 18 F_5 F_{13} + 18 F_7 F_{11} + 9 F_9^2 - \\ & 2 G_3 G_{15} - 2 G_5 G_{13} - 2 G_7 G_{11} - G_9^2 + \frac{2 G_1 G_{15}}{3} + \frac{2 G_3 G_{13}}{3} + \frac{2 G_5 G_{11}}{3} + \frac{2 G_7 G_9}{3} + \\ & \frac{2 G_1 G_{13}}{45} + \frac{2 G_3 G_{11}}{45} + \frac{2 G_5 G_9}{45} + \frac{G_7^2}{45} + \frac{4 G_1 G_{11}}{945} + \frac{4 G_3 G_9}{945} + \frac{4 G_5 G_7}{945} + \frac{2 G_1 G_9}{4725} + \\ & \frac{2 G_3 G_7}{4725} + \frac{G_5^2}{4725} + \frac{4 G_1 G_7}{93555} + \frac{4 G_3 G_5}{93555} + \frac{2764 G_1 G_5}{638512875} + \frac{1382 G_3^2}{638512875} + \\ & \frac{8 G_1 G_3}{18243225} + \frac{3617 G_1^2}{162820783125}. \end{aligned}$$

5.10.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} H \frac{\partial G}{\partial \eta} = & \theta^{17} (H_1 G'_{17} + H_3 G'_{15} + H_5 G'_{13} + H_7 G'_{11} + H_9 G'_9 + H_{11} G'_7 + H_{13} G'_5 + \\ & H_{15} F'_3 + H_{17} G'_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F \frac{\partial G}{\partial \theta} = & \theta^{17} (17 F_1 G_{17} + 15 F_3 G_{15} + 13 F_5 G_{13} + 11 F_7 G_{11} + 9 F_9 G_9 + 7 F_{11} G_7 + \\ & 5 F_{13} G_5 + 3 F_{15} G_3 + F_{17} G_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot \theta F G = & \theta^{17} (F_1 G_{17} + F_3 G_{15} + F_5 G_{13} + F_7 G_{11} + F_9 G_9 + F_{11} G_7 + F_{13} G_5 + \\ & F_{15} G_3 + F_{17} G_1 - \frac{F_1 G_{15}}{3} - \frac{F_3 G_{13}}{3} - \frac{F_5 G_{11}}{3} - \frac{F_7 G_9}{3} - \frac{F_9 G_7}{3} - \frac{F_{11} G_5}{3} - \\ & \frac{F_{13} G_3}{3} - \frac{F_{15} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{13}}{45} - \frac{F_3 G_{11}}{45} - \frac{F_5 G_9}{45} - \frac{F_7 G_7}{45} - \frac{F_9 G_5}{45} - \frac{F_{11} G_3}{45} - \\ & \frac{F_{13} G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_{11}}{945} - \frac{2 F_3 G_9}{945} - \frac{2 F_5 G_7}{945} - \frac{2 F_7 G_5}{945} - \frac{2 F_9 G_3}{945} - \frac{2 F_{11} G_1}{945} - \\ & \frac{F_1 G_9}{4725} - \frac{F_3 G_7}{4725} - \frac{F_5 G_5}{4725} - \frac{F_7 G_3}{4725} - \frac{F_9 G_1}{4725} - \frac{2 F_1 G_7}{93555} - \frac{2 F_3 G_5}{93555} - \frac{2 F_7 G_1}{93555} - \\ & \frac{1382 F_1 G_5}{638512875} - \frac{1382 F_3 G_3}{638512875} - \frac{1382 F_5 G_1}{638512875} - \frac{4 F_1 G_3}{18243225} - \frac{4 F_3 G_1}{18243225} - \\ & \frac{3617 F_1 G_1}{162820783125}) \end{aligned}$$

$$\nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = \nu \theta^{17} G''_{17}$$

$$\nu' \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = \nu' \theta^{17} G'_{17}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \nu G''_{17} + \nu' G'_{17} - H_1 G'_{17} - H_{17} G'_1 - 18F_1 G_{17} - 2F_{17} G_1 = H_3 G'_{15} + H_5 G'_{13} + \\ & H_7 G'_{11} + H_9 G'_9 + H_{11} G'_7 + H_{13} G'_5 + H_{15} G'_3 + 16F_3 G_{15} + 14F_5 G_{13} + 12F_7 G_{11} + \\ & 10F_9 G_9 + 8F_{11} G_7 + 6F_{13} G_5 + 4F_{15} G_3 - \frac{F_1 G_{15}}{3} - \frac{F_3 G_{13}}{3} - \frac{F_5 G_{11}}{3} - \frac{F_7 G_9}{3} - \\ & \frac{F_9 G_7}{3} - \frac{F_{11} G_5}{3} - \frac{F_{13} G_3}{3} - \frac{F_{15} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{13}}{45} - \frac{F_3 G_{11}}{45} - \frac{F_5 G_9}{45} - \frac{F_7 G_7}{45} - \frac{F_9 G_5}{45} - \\ & \frac{F_{11} G_3}{45} - \frac{F_{13} G_1}{45} - \frac{2F_1 G_{11}}{945} - \frac{2F_3 G_9}{945} - \frac{2F_5 G_7}{945} - \frac{2F_7 G_5}{945} - \frac{2F_9 G_3}{945} - \frac{2F_{11} G_1}{945} - \\ & \frac{F_1 G_9}{4725} - \frac{F_3 G_7}{4725} - \frac{F_5 G_5}{4725} - \frac{F_7 G_3}{4725} - \frac{F_9 G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_7}{93555} - \frac{2F_3 G_5}{93555} - \frac{2F_5 G_3}{93555} - \frac{2F_7 G_1}{93555} - \\ & \frac{1382F_1 G_5}{638512875} - \frac{1382F_3 G_3}{638512875} - \frac{1382F_5 G_1}{638512875} - \frac{4F_1 G_3}{18243225} - \frac{4F_3 G_1}{18243225} - \frac{3617F_1 G_1}{162820783125}. \end{aligned}$$

5.10.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^{17} C''_{17} \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^{17} C'_{17} \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc\theta^{17} (H_1 C'_{17} + H_3 C'_{15} + H_5 C'_{13} + H_7 C'_{11} + H_9 C'_9 + H_{11} C'_7 + H_{13} C'_5 + \\ & \quad H_{15} C'_3 + H_{17} C'_1) \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= 16F_1 C_{17} + 14F_3 C_{15} + 12F_5 C_{13} + 10F_7 C_{11} + 8F_9 C_9 + 6F_{11} C_7 + 4F_{13} C_5 + \\ & \quad 2F_{15} C_3. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} C''_{17} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{17} - Sc(H_1 C'_{17} + H_{17} C'_1 + 16F_1 C_{17}) &= Sc(H_3 C'_{15} + H_5 C'_{13} + \\ H_7 C'_{11} + H_9 C'_9 + H_{11} C'_7 + H_{13} C'_5 + H_{15} C'_3 + 14F_3 C_{15} + 12F_5 C_{13} + \\ 10F_7 C_{11} + 8F_9 C_9 + 6F_{11} C_7 + 4F_{13} C_5 + 2F_{15} C_3). \end{aligned}$$

5.11 Décimo sistema (Para θ^{18} e θ^{19})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{18} e θ^{19} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{19} + 20F_{19} &= \frac{87734F_1}{38979295480125} + \frac{3617F_3}{162820783125} + \frac{4F_5}{18243225} + \frac{1382F_7}{638512875} + \\
&\quad \frac{2F_9}{93555} + \frac{F_{11}}{4725} + \frac{2F_{13}}{945} + \frac{F_{15}}{45} + \frac{F_{17}}{3} \\
\nu F''_{19} + \nu' F'_{19} - H_1 F'_{19} - H_{19} F'_1 - 20F_1 F_{19} + 2G_1 G_{19} &= H_3 F'_{17} + H_5 F'_{15} + H_7 F'_{13} + \\
&\quad H_9 F'_{11} + H_{11} F'_9 + H_{13} F'_7 + H_{15} F'_5 + H_{17} F'_3 + 20F_3 F_{17} + 20F_5 F_{15} + 20F_7 F_{13} + \\
&\quad 20F_9 F_{11} - 2G_3 G_{17} - 2G_5 G_{15} - 2G_7 G_{13} - 2G_9 G_{11} + \frac{2G_1 G_{17}}{3} + \frac{2G_3 G_{15}}{3} + \\
&\quad \frac{2G_5 G_{13}}{3} + \frac{2G_7 G_{11}}{3} + \frac{G_9^2}{3} + \frac{2G_1 G_{15}}{45} + \frac{2G_3 G_{13}}{45} + \frac{2G_5 G_{11}}{45} + \frac{2G_7 G_9}{45} + \frac{4G_1 G_{13}}{945} + \\
&\quad \frac{4G_3 G_{11}}{945} + \frac{4G_5 G_9}{945} + \frac{2G_7^2}{945} + \frac{2G_1 G_{11}}{4725} + \frac{2G_3 G_9}{4725} + \frac{2G_5 G_7}{4725} + \frac{4G_1 G_9}{93555} + \frac{4G_3 G_7}{93555} + \\
&\quad \frac{2G_5^2}{93555} + \frac{2764G_1 G_7}{638512875} + \frac{2764G_5 G_3}{638512875} + \frac{8G_1 G_5}{18243225} + \frac{4G_3^2}{18243225} + \frac{7234G_1 G_3}{162820783125} + \\
&\quad \frac{87734G_1^2}{38979295480125} \\
\nu G''_{19} + \nu' G'_{19} - H_1 G'_{19} - H_{19} G'_1 - 20F_1 G_{19} - 2F_{19} G_1 &= H_3 G'_{17} + H_5 G'_{15} + H_7 G'_{13} + \\
&\quad H_9 G'_{11} + H_{11} G'_9 + H_{13} G'_7 + H_{15} G'_5 + H_{17} G'_3 + 18F_3 G_{17} + 16F_5 G_{15} + 14F_7 G_{13} + \\
&\quad 12F_9 G_{11} + 10F_{11} G_9 + 8F_{13} G_7 + 6F_{15} G_5 + 4F_{17} G_3 - \frac{F_1 G_{17}}{3} - \frac{F_3 G_{15}}{3} - \frac{F_5 G_{13}}{3} - \\
&\quad \frac{F_7 G_{11}}{3} - \frac{F_9 G_9}{3} - \frac{F_{11} G_7}{3} - \frac{F_{13} G_5}{3} - \frac{F_{15} G_3}{3} - \frac{F_{17} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{15}}{45} - \frac{F_3 G_{13}}{45} - \\
&\quad \frac{F_5 G_{11}}{45} - \frac{F_7 G_9}{45} - \frac{F_9 G_7}{45} - \frac{F_{11} G_5}{45} - \frac{F_{13} G_3}{45} - \frac{F_{15} G_1}{45} - \frac{2F_1 G_{13}}{945} - \frac{2F_3 G_{11}}{945} - \\
&\quad \frac{2F_5 G_9}{945} - \frac{2F_7 G_7}{945} - \frac{2F_9 G_5}{945} - \frac{2F_{11} G_3}{945} - \frac{2F_{13} G_1}{945} - \frac{F_1 G_{11}}{4725} - \frac{F_3 G_9}{4725} - \frac{F_5 G_7}{4725} - \\
&\quad \frac{F_7 G_5}{4725} - \frac{F_9 G_3}{4725} - \frac{F_{11} G_1}{4725} - \frac{2F_1 G_9}{93555} - \frac{2F_3 G_7}{93555} - \frac{2F_5 G_5}{93555} - \frac{2F_7 G_3}{93555} - \frac{2F_9 G_1}{93555} - \\
&\quad \frac{1382F_1 G_7}{638512875} - \frac{1382F_3 G_5}{638512875} - \frac{1382F_5 G_3}{638512875} - \frac{1382F_7 G_1}{638512875} - \frac{4F_1 G_5}{18243225} - \frac{4F_3 G_3}{18243225} - \\
&\quad \frac{4F_5 G_1}{18243225} - \frac{3617F_1 G_3}{162820783125} - \frac{3617F_3 G_1}{162820783125} - \frac{87734F_1 G_1}{38979295480125} \\
\frac{1}{\nu} C''_{19} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{19} - Sc(H_1 C'_{19} + H_{19} C'_1 + 18F_1 C_{19}) &= Sc(H_3 C'_{17} + H_5 C'_{15} + H_7 C'_{13} + \\
&\quad H_9 C'_{11} + H_{11} C'_9 + H_{13} C'_7 + H_{15} C'_5 + H_{17} C'_3 + 16F_3 C_{17} + 14F_5 C_{15} + 12F_7 C_{13} + \\
&\quad 10F_9 C_{11} + 8F_{11} C_9 + 6F_{13} C_7 + 4F_{15} C_5 + 2F_{17} C_3).
\end{aligned}$$

As Subseções 5.11.1 a 5.11.4 mostram o desenvolvimento das equações do décimo sistema.

5.11.1 Equação da continuidade

Seja a equação:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \eta} &= \theta^{18} H'_{19} \\ \frac{\partial F}{\partial \theta} &= 17\theta^{18} F_{19} \\ \cot \theta F &= \theta^{18} \left(F_{19} - \frac{F_{17}}{3} - \frac{F_{15}}{45} - \frac{2F_{13}}{945} - \frac{F_{11}}{4725} - \frac{2F_9}{93555} - \frac{1382F_7}{638512875} - \frac{4F_5}{18243225} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3617F_3}{162820783125} - \frac{87734F_1}{38979295480125} \right). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} H'_{19} + 20F_{19} &= \frac{87734F_1}{38979295480125} + \frac{3617F_3}{162820783125} + \frac{4F_5}{18243225} + \frac{1382F_7}{638512875} + \\ &\quad \frac{2F_9}{93555} + \frac{F_{11}}{4725} + \frac{2F_{13}}{945} + \frac{F_{15}}{45} + \frac{F_{17}}{3}. \end{aligned}$$

5.11.2 Equação da quantidade de movimento na direção da componente θ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \theta^{19} (H_1 F'_{19} + H_3 F'_{17} + H_5 F'_{15} + H_7 F'_{13} + H_9 F'_{11} + H_{11} F'_9 + H_{13} F'_7 + \\
&\quad H_{15} F'_5 + H_{17} F'_3 + H_{19} F'_1) \\
F \frac{\partial F}{\partial \theta} &= \theta^{19} (20 F_1 F_{19} + 20 F_3 F_{17} + 20 F_5 F_{15} + 20 F_7 F_{13} + 20 F_9 F_{11}) \\
\cot \theta G^2 &= \theta^{19} \left(2G_1 G_{19} + 2G_3 G_{17} + 2G_5 G_{15} + 2G_7 G_{13} + 2G_9 G_{11} - \frac{2G_1 G_{17}}{3} - \right. \\
&\quad \frac{2G_3 G_{15}}{3} - \frac{2G_5 G_{13}}{3} - \frac{2G_7 G_{11}}{3} - \frac{G_9^2}{3} - \frac{2G_1 G_{15}}{45} - \frac{2G_3 G_{13}}{45} - \frac{2G_5 G_{11}}{45} - \\
&\quad \frac{2G_7 G_9}{45} - \frac{4G_1 G_{13}}{945} - \frac{4G_3 G_{11}}{945} - \frac{4G_5 G_9}{945} - \frac{2G_7^2}{945} - \frac{2G_1 G_{11}}{4725} - \frac{2G_3 G_9}{4725} - \\
&\quad \frac{2G_5 G_7}{4725} - \frac{4G_1 G_9}{93555} - \frac{4G_3 G_7}{93555} - \frac{2G_5^2}{93555} - \frac{2764 G_1 G_7}{638512875} - \frac{2764 G_5 G_3}{638512875} - \\
&\quad \left. \frac{8G_1 G_5}{18243225} - \frac{4G_3^2}{18243225} - \frac{7234 G_1 G_3}{162820783125} - \frac{87734 G_1^2}{38979295480125} \right) \\
\nu \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{19} F''_{19} \\
\nu' \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{19} F'_{19}.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\nu F''_{19} + \nu' F'_{19} - H_1 F'_{19} - H_{19} F'_1 - 20 F_1 F_{19} + 2G_1 G_{19} &= H_3 F'_{17} + H_5 F'_{15} + H_7 F'_{13} + \\
H_9 F'_{11} + H_{11} F'_9 + H_{13} F'_7 + H_{15} F'_5 + H_{17} F'_3 + 20 F_3 F_{17} + 20 F_5 F_{15} + 20 F_7 F_{13} + \\
20 F_9 F_{11} - 2G_3 G_{17} - 2G_5 G_{15} - 2G_7 G_{13} - 2G_9 G_{11} + \frac{2G_1 G_{17}}{3} + \frac{2G_3 G_{15}}{3} + \\
\frac{2G_5 G_{13}}{3} + \frac{2G_7 G_{11}}{3} + \frac{G_9^2}{3} + \frac{2G_1 G_{15}}{45} + \frac{2G_3 G_{13}}{45} + \frac{2G_5 G_{11}}{45} + \frac{2G_7 G_9}{45} + \frac{4G_1 G_{13}}{945} + \\
\frac{4G_3 G_{11}}{945} + \frac{4G_5 G_9}{945} + \frac{2G_7^2}{945} + \frac{2G_1 G_{11}}{4725} + \frac{2G_3 G_9}{4725} + \frac{2G_5 G_7}{4725} + \frac{4G_1 G_9}{93555} + \frac{4G_3 G_7}{93555} + \\
\frac{2G_5^2}{93555} + \frac{2764 G_1 G_7}{638512875} + \frac{2764 G_5 G_3}{638512875} + \frac{8G_1 G_5}{18243225} + \frac{4G_3^2}{18243225} + \frac{7234 G_1 G_3}{162820783125} + \\
\frac{87734 G_1^2}{38979295480125}.
\end{aligned}$$

5.11.3 Equação da quantidade de movimento na direção da componente ϕ

Seja a equação:

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta F G = \nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \nu' \frac{\partial G}{\partial \eta}.$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
H \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \theta^{19} (H_1 G'_{19} + H_3 G'_{17} + H_5 G'_{15} + H_7 G'_{13} + H_9 G'_{11} + H_{11} G'_9 + H_{13} G'_7 + \\
&\quad H_{15} G'_5 + H_{17} G'_3 + H_{19} G'_1) \\
F \frac{\partial G}{\partial \theta} &= \theta^{19} (19 F_1 G_{19} + 17 F_3 G_{17} + 15 F_5 G_{15} + 13 F_7 G_{13} + 11 F_9 G_{11} + 9 F_{11} G_9 + \\
&\quad 7 F_{13} G_7 + 5 F_{15} G_5 + 3 F_{17} G_3 + F_{19} G_1) \\
\cot \theta FG &= \theta^{19} (F_1 G_{19} + F_3 G_{17} + F_5 G_{15} + F_7 G_{13} + F_9 G_{11} + F_{11} G_9 + F_{13} G_7 + F_{15} G_5 + \\
&\quad F_{17} G_3 + F_{19} G_1 - \frac{F_1 G_{17}}{3} - \frac{F_3 G_{15}}{3} - \frac{F_5 G_{13}}{3} - \frac{F_7 G_{11}}{3} - \frac{F_9 G_9}{3} - \frac{F_{11} G_7}{3} - \\
&\quad \frac{F_{13} G_5}{3} - \frac{F_{15} G_3}{3} - \frac{F_{17} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{15}}{45} - \frac{F_3 G_{13}}{45} - \frac{F_5 G_{11}}{45} - \frac{F_7 G_9}{45} - \frac{F_9 G_7}{45} - \\
&\quad \frac{F_{11} G_5}{45} - \frac{F_{13} G_3}{45} - \frac{F_{15} G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_{13}}{945} - \frac{2 F_3 G_{11}}{945} - \frac{2 F_5 G_9}{945} - \frac{2 F_7 G_7}{945} - \frac{2 F_9 G_5}{945} - \\
&\quad \frac{2 F_{11} G_3}{945} - \frac{2 F_{13} G_1}{945} - \frac{F_1 G_{11}}{4725} - \frac{F_3 G_9}{4725} - \frac{F_5 G_7}{4725} - \frac{F_7 G_5}{4725} - \frac{F_9 G_3}{4725} - \frac{F_{11} G_1}{4725} - \\
&\quad \frac{2 F_1 G_9}{93555} - \frac{2 F_3 G_7}{93555} - \frac{2 F_5 G_5}{93555} - \frac{2 F_7 G_3}{93555} - \frac{2 F_9 G_1}{93555} - \frac{1382 F_1 G_7}{638512875} - \frac{1382 F_3 G_5}{638512875} - \\
&\quad \frac{1382 F_5 G_3}{638512875} - \frac{1382 F_7 G_1}{638512875} - \frac{4 F_1 G_5}{18243225} - \frac{4 F_3 G_3}{18243225} - \frac{4 F_5 G_1}{18243225} - \\
&\quad \frac{3617 F_1 G_3}{162820783125} - \frac{3617 F_3 G_1}{162820783125} - \frac{87734 F_1 G_1}{38979295480125}) \\
\nu \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} &= \nu \theta^{19} G''_{19} \\
\nu' \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \nu' \theta^{19} G'_{19}.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\nu G''_{19} + \nu' G'_{19} - H_1 G'_{19} - H_{19} G'_1 - 20 F_1 G_{19} - 2 F_{19} G_1 &= H_3 G'_{17} + H_5 G'_{15} + H_7 G'_{13} + \\
H_9 G'_{11} + H_{11} G'_9 + H_{13} G'_7 + H_{15} G'_5 + H_{17} G'_3 + 18 F_3 G_{17} + 16 F_5 G_{15} + 14 F_7 G_{13} + \\
12 F_9 G_{11} + 10 F_{11} G_9 + 8 F_{13} G_7 + 6 F_{15} G_5 + 4 F_{17} G_3 - \frac{F_1 G_{17}}{3} - \frac{F_3 G_{15}}{3} - \frac{F_5 G_{13}}{3} - \\
\frac{F_7 G_{11}}{3} - \frac{F_9 G_9}{3} - \frac{F_{11} G_7}{3} - \frac{F_{13} G_5}{3} - \frac{F_{15} G_3}{3} - \frac{F_{17} G_1}{3} - \frac{F_1 G_{15}}{45} - \frac{F_3 G_{13}}{45} - \frac{F_5 G_{11}}{45} - \\
\frac{F_7 G_9}{45} - \frac{F_9 G_7}{45} - \frac{F_{11} G_5}{45} - \frac{F_{13} G_3}{45} - \frac{F_{15} G_1}{45} - \frac{2 F_1 G_{13}}{945} - \frac{2 F_3 G_{11}}{945} - \frac{2 F_5 G_9}{945} - \\
\frac{2 F_7 G_7}{945} - \frac{2 F_9 G_5}{945} - \frac{2 F_{11} G_3}{945} - \frac{2 F_{13} G_1}{945} - \frac{F_1 G_{11}}{4725} - \frac{F_3 G_9}{4725} - \frac{F_5 G_7}{4725} - \frac{F_7 G_5}{4725} - \frac{F_9 G_3}{4725} - \\
\frac{F_{11} G_1}{4725} - \frac{2 F_1 G_9}{93555} - \frac{2 F_3 G_7}{93555} - \frac{2 F_5 G_5}{93555} - \frac{2 F_7 G_3}{93555} - \frac{2 F_9 G_1}{93555} - \frac{1382 F_1 G_7}{638512875} - \\
\frac{1382 F_3 G_5}{638512875} - \frac{1382 F_5 G_3}{638512875} - \frac{1382 F_7 G_1}{638512875} - \frac{4 F_1 G_5}{18243225} - \frac{4 F_3 G_3}{18243225} - \frac{4 F_5 G_1}{18243225} - \\
\frac{3617 F_1 G_3}{162820783125} - \frac{3617 F_3 G_1}{162820783125} - \frac{87734 F_1 G_1}{38979295480125}.
\end{aligned}$$

5.11.4 Equação da concentração

Seja a equação:

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} - \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} - ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} = 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} &= \frac{1}{\nu} \theta^{19} C''_{19} \\ \frac{\nu'}{\nu^2} \frac{\partial C}{\partial \eta} &= \frac{\nu'}{\nu^2} \theta^{19} C'_{19} \\ ScH \frac{\partial C}{\partial \eta} &= Sc \theta^{19} (H_1 C'_{19} + H_3 C'_{17} + H_5 C'_{15} + H_7 C'_{13} + H_9 C'_{11} + H_{11} C'_9 + H_{13} C'_7 + \\ &\quad H_{15} C'_5 + H_{17} C'_3 + H_{19} C'_1) \\ ScF \frac{\partial C}{\partial \theta} &= Sc \theta^{19} (18F_1 C_{19} + 16F_3 C_{17} + 14F_5 C_{15} + 12F_7 C_{13} + 10F_9 C_{11} + 8F_{11} C_9 + \\ &\quad 6F_{13} C_7 + 4F_{15} C_5 + 2F_{17} C_3). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} C''_{19} - \frac{\nu'}{\nu^2} C'_{19} - Sc(H_1 C'_{19} + H_{19} C'_1 + 18F_1 C_{19}) &= Sc(H_3 C'_{17} + H_5 C'_{15} + H_7 C'_{13} + \\ H_9 C'_{11} + H_{11} C'_9 + H_{13} C'_7 + H_{15} C'_5 + H_{17} C'_3 + 16F_3 C_{17} + 14F_5 C_{15} + 12F_7 C_{13} + \\ 10F_9 C_{11} + 8F_{11} C_9 + 6F_{13} C_7 + 4F_{15} C_5 + 2F_{17} C_3). \end{aligned}$$

5.12 Estrutura da matriz com as derivadas parciais das equações discretizadas

Dadas as derivadas parciais das equações discretizadas da continuidade, da quantidade do movimento na direção das componentes θ e ϕ e da concentração dos dez sistemas, a matriz de cada sistema tem a mesma estrutura. Ou seja, temos uma matriz esparsa com as condições de contorno de cada função, em nosso caso, F , G , H e C nas primeiras e últimas linhas e entre as condições de contorno os termos das derivadas parciais.

Esquemáticamente temos uma matriz quadrada de ordem $4n$, sendo n o número

de pontos da malha:

The diagram illustrates a grid of points (circles) arranged in a pattern that resembles a staircase or a series of steps. The points are labeled with "C.C." at the top left and bottom right. The grid is composed of several rows and columns of points, with some points being solid black and others being open circles. The points are arranged in a way that suggests a sequence or a path through the grid.

onde os símbolos \circ representam o número zero; e os símbolos \bullet representam os endereços onde os elementos da matriz são diferentes de zero, ou seja, representam as equações encontradas a partir das derivadas parciais de cada equação do sistema.

O primeiro bloco de símbolos, compreendido pelas linhas: 5, 6, 7 e 8 e colunas: 1 a 12, tem as seguintes características:

- Nas quatro primeiras colunas alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G, H e C no ponto $i - 1$ da malha;
- Nas quatro colunas seguintes alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G, H e C no ponto i da malha;
- E ainda, nas quatro últimas colunas alocam-se as derivadas parciais em relação as funções F, G, H e C no ponto $i + 1$ da malha.

E essa distribuição repete-se nos blocos seguintes.

5.13 Resultados numéricos parciais

Nas Seções (5.2)-(5.11) foram apresentados os dez sistemas de equações diferenciais obtidos através do método de série de potências.

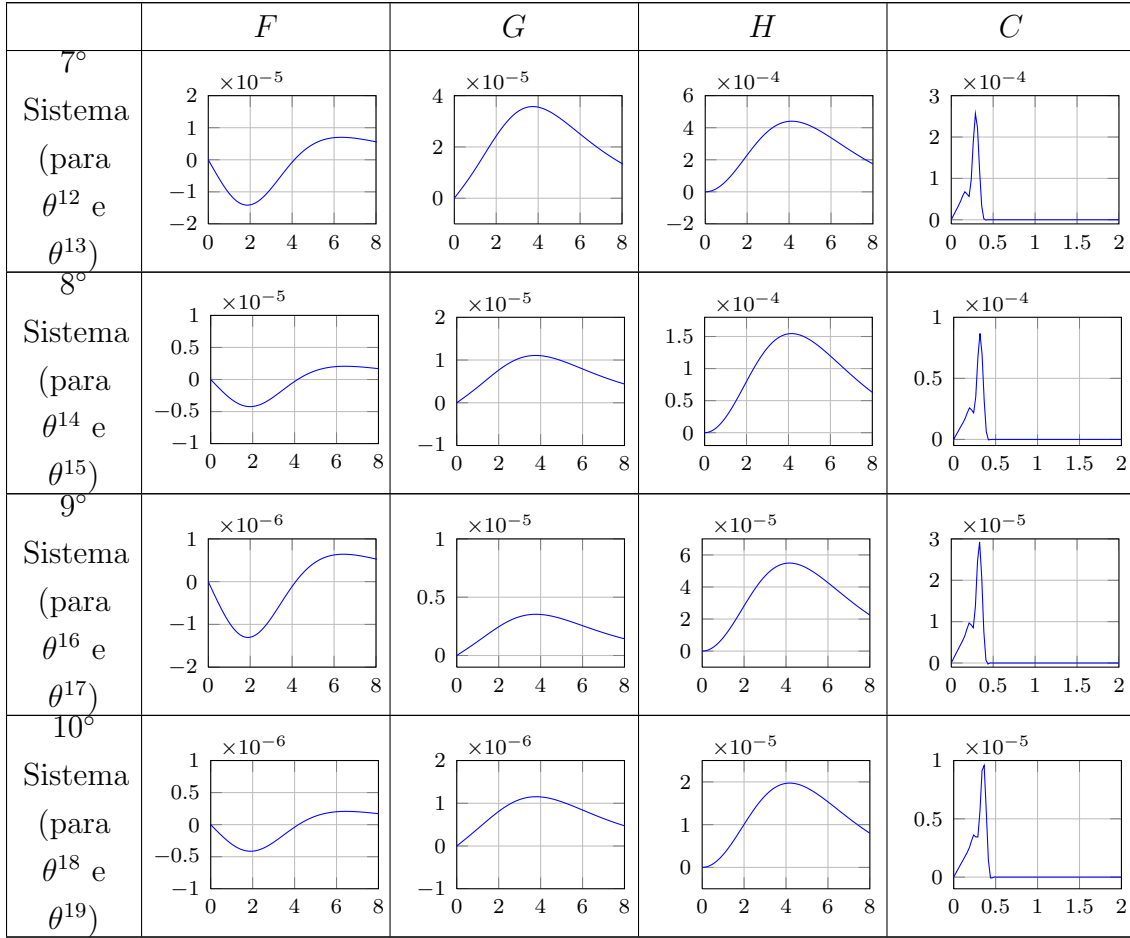
A resolução destes sistemas foi realizada através da implementação de um código numérico em MATLAB, tendo como base o Método da Relaxação, descrito no Cap. 3 com precisão de aproximação de ordem 2.

Desta forma, a Tabela 5.1 exibe os resultados de cada um desses sistemas.

Tabela 5.1: Resultados dos sistemas de equações diferenciais

	F	G	H	C
1° Sistema (para θ^0 e θ^1)				
2° Sistema (para θ^2 e θ^3)				
3° Sistema (para θ^4 e θ^5)				
4° Sistema (para θ^6 e θ^7)				
5° Sistema (para θ^8 e θ^9)				
6° Sistema para (θ^{10} e θ^{11})				

Tabela 5.1: Resultados dos sistemas de equações diferenciais (continuação)



Na Seção 5.1 vimos que a viscosidade variável (ν) é dada por: $\nu = \exp mC$. Desta forma, a derivada de ν é dada por: $\nu' = m \exp(mC)$.

Estes termos (ν e ν') são calculados de forma independente para cada sistema de equações. Assim, na Tab. 5.2 exibimos ν e ν' para cada sistema.

Tabela 5.2: Resultados de ν e ν' para cada sistema de equações

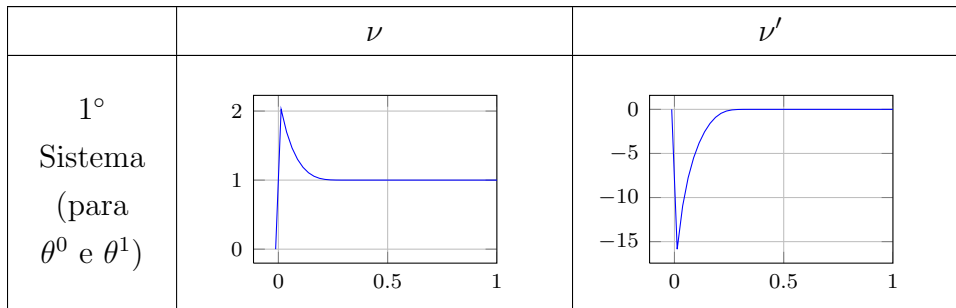


Tabela 5.2: Resultados de ν e ν' para cada sistema de equações (continuação)

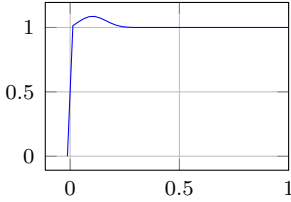
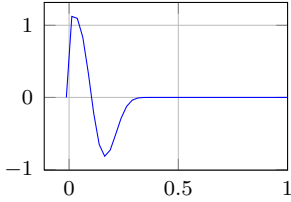
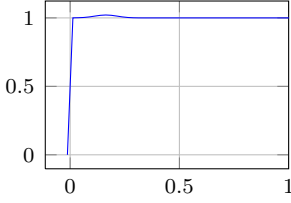
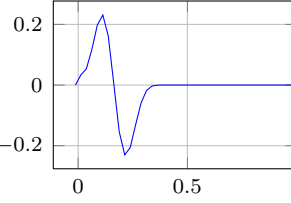
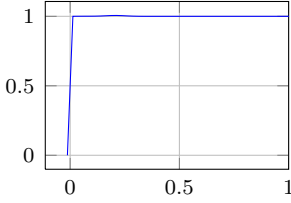
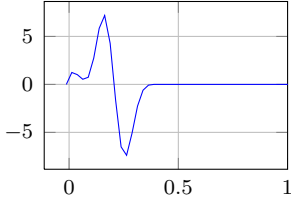
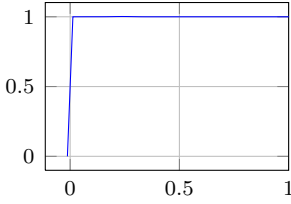
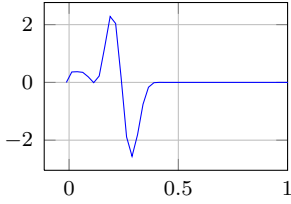
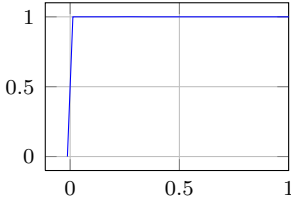
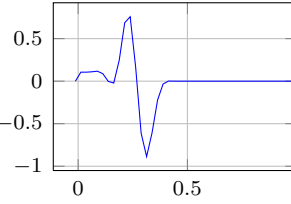
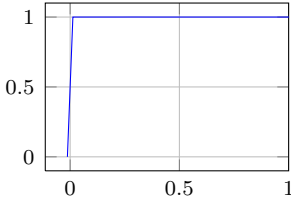
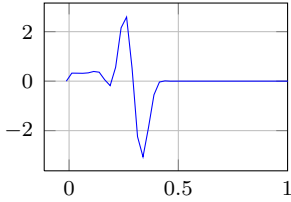
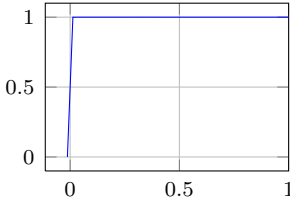
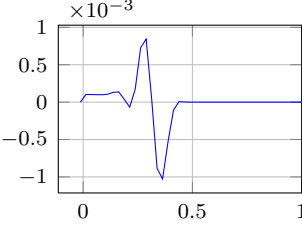
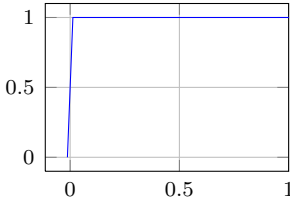
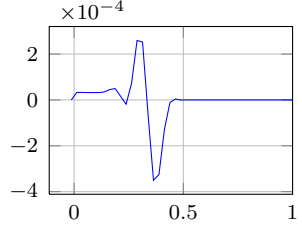
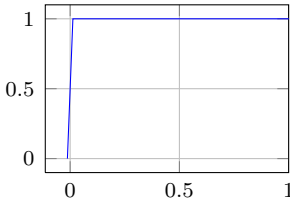
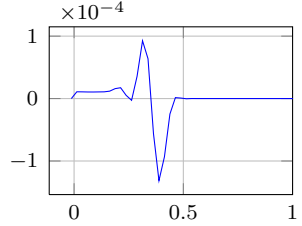
	ν	ν'
<p>2° Sistema (para θ^2 e θ^3)</p>		
<p>3° Sistema (para θ^4 e θ^5)</p>		
<p>4° Sistema (para θ^6 e θ^7)</p>		
<p>5° Sistema (para θ^8 e θ^9)</p>		
<p>6° Sistema (para θ^{10} e θ^{11})</p>		
<p>7° Sistema (para θ^{12} e θ^{13})</p>		

Tabela 5.2: Resultados de ν e ν' para cada sistema de equações (continuação)

	ν	ν'
8° Sistema (para θ^{14} e θ^{15})		
9° Sistema (para θ^{16} e θ^{17})		
10° Sistema (para θ^{18} e θ^{19})		

5.14 Resultados numéricos - soma das parciais

Através da Tab. 5.1, na Seção 5.13, são exibidos os resultados numéricos de cada sistema de equações. Como estamos utilizando o método de séries de potências para encontrar os perfis adimensionais F , G , H e C , apresentamos nesta seção a soma de cada perfil para θ entre 20° e 90° . São apresentadas as somas de 4 termos a 10 termos da série de cada função, conforme foi visto no início do capítulo (ver Eqs.(5.17)-(5.20)).

Para $\theta = 20^\circ$

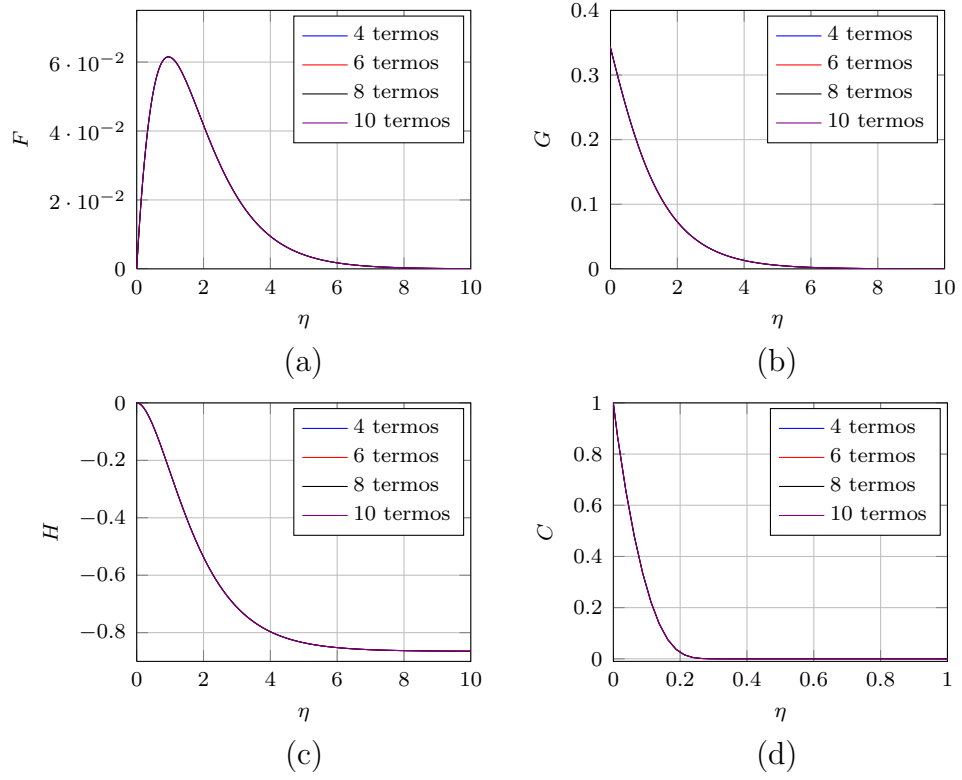


Figura 5.1: Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 20^\circ$

Para $\theta = 40^\circ$

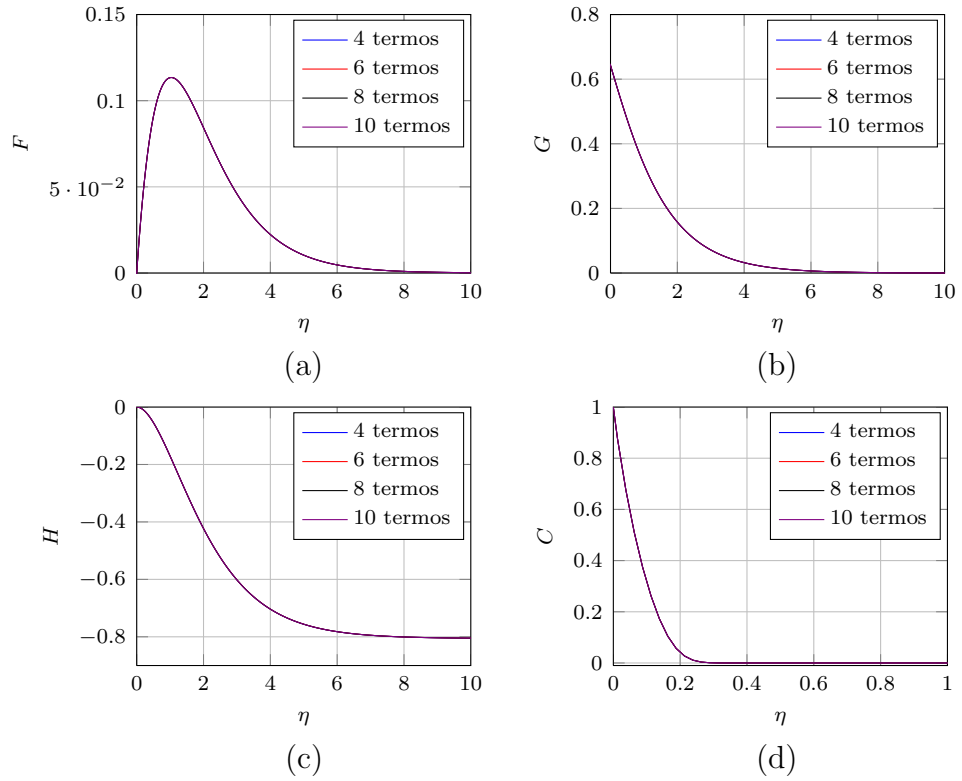


Figura 5.2: Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 40^\circ$

Para $\theta = 60^\circ$

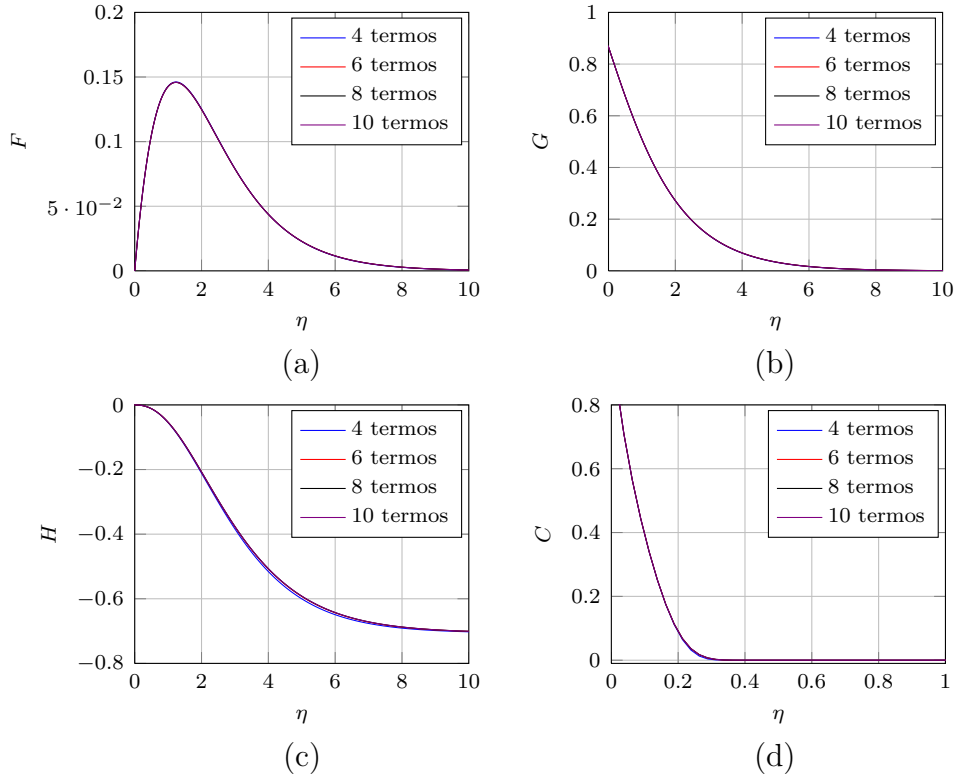


Figura 5.3: Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 60^\circ$

Para $\theta = 80^\circ$

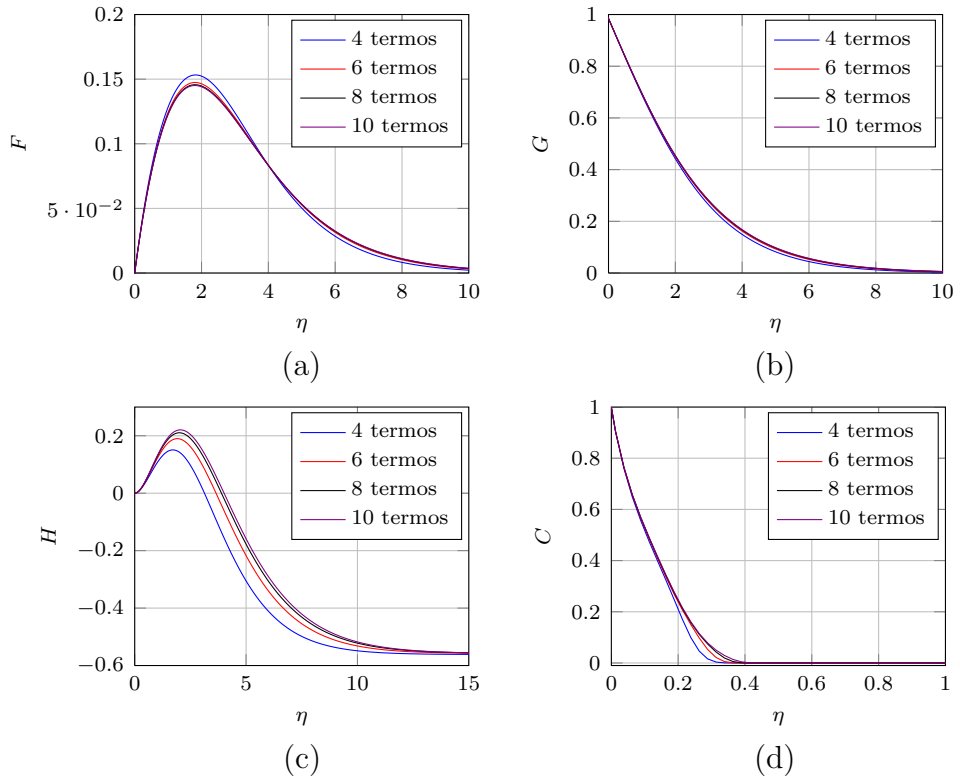


Figura 5.4: Soma das funções F, G, H e C em $\theta = 80^\circ$

Para $\theta = 90^\circ$

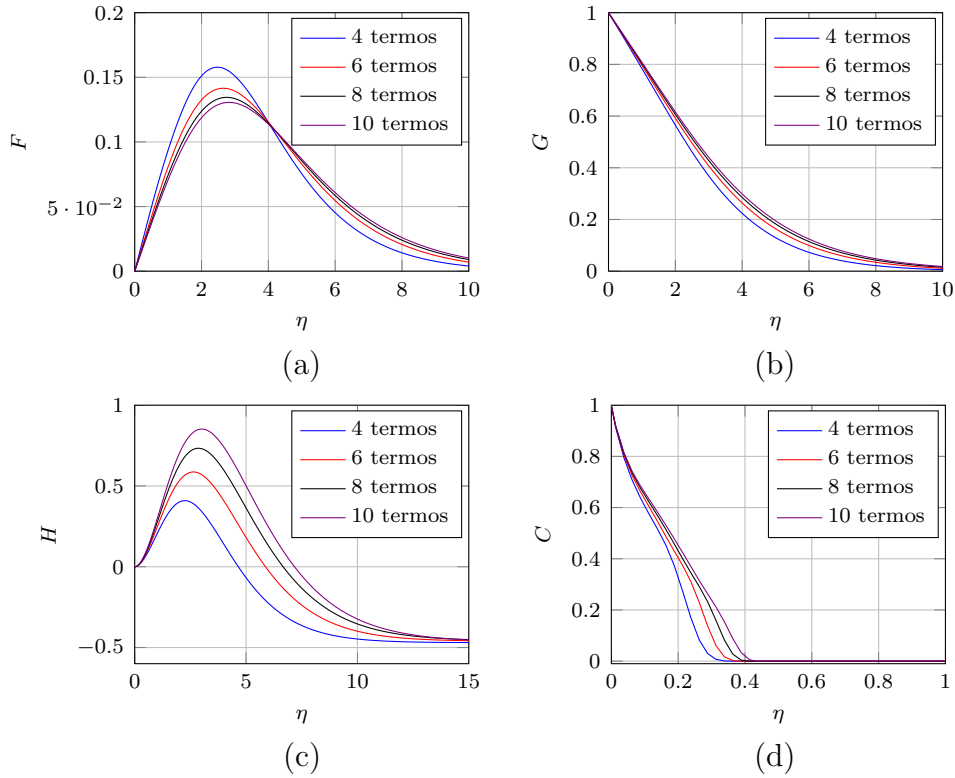


Figura 5.5: Soma das funções F, G, H, C em $\theta = 90^\circ$

Verificamos que os perfis F , G e H para o caso da viscosidade variável são similares ao caso da viscosidade constante do fluido abordado (ver Apêndice A).

Podemos observar nas Figs. 5.4 - 5.5 que a expansão da série em 10 termos não é suficiente para a convergência do método de séries de potências para ângulos superiores a aproximadamente 70° . Porém, para valores inferiores a 70° temos resultados satisfatórios.

Na Sec. 5.15 deste capítulo, veremos que não é necessário aumentarmos o número de termos das séries pois, a partir, de um ângulo θ^* o fluido “descola” da superfície da semi-esfera, não escoando pela camada limite que é a hipótese abordada.

5.15 Ângulo de descolamento

Barcia[10] mostra em seu artigo a existência de um valor para o ângulo θ^* tal que há o “descolamento” do fluido na interface eletrodo/eletrolito e o *outflow* do escoamento ocorre na direção da velocidade radial. O ângulo θ^* é onde a velocidade radial, v_r , torna-se positiva próxima a superfície do eletrodo e δ^* é a espessura da camada limite em que a velocidade radial tem sinal positivo.

O perfil adimensional H que representa a velocidade radial é sempre negativo para $\theta < \theta^*$. Para $\theta > \theta^*$, H inicia com um valor positivo para $r = r_0$ e muda

o seu sinal em $r = r_0 + \delta^*$, isto é, inverte o sentido do escoamento ocorrendo o descolamento do fluido.

Sob a hipótese de fluido com viscosidade constante, o trabalho de Barcia[10] obteve esse ângulo de descolamento $\theta^* = 61^\circ$. Para as simulações realizadas nesta dissertação o valor do ângulo θ^* foi de aproximadamente 62.4° , nos casos de viscosidade constante e viscosidade variável. A Fig. 5.6 exibe o perfil H para quatro ângulos distintos de θ para os dois casos, ilustrando o que foi dito.

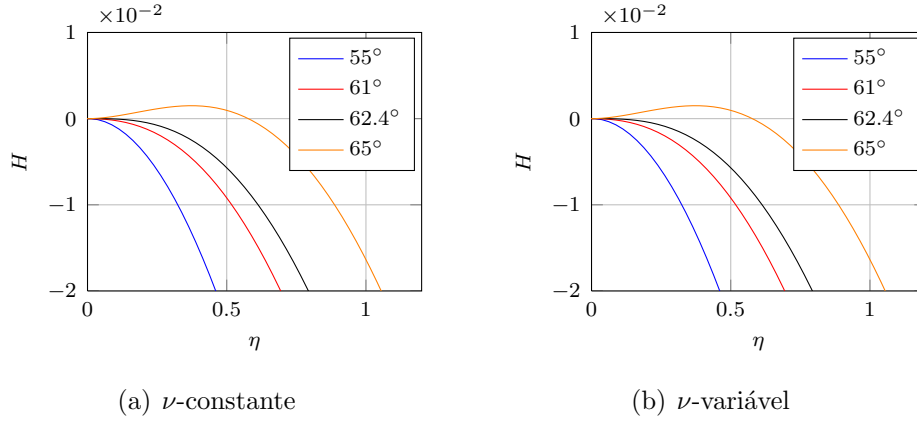


Figura 5.6: Perfil H para $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° com ν constante e variável

A fim de visualizar a mudança do sinal expressa no início desta seção, as Tabs. 5.3 e 5.4 mostram os valores da função H , nos dois casos, para os ângulos de $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.5^\circ$ e 65° para a obtenção de precisão da mudança de sinais próximo a superfície do eletrodo.

Nas simulações realizadas utilizamos uma malha deslocada (chamada *staggered*), nesse tipo de malha localizamos a fronteira do sistema no ponto médio do intervalo entre os dois primeiros e os dois últimos pontos. Devido a este pequeno deslocamento nos extremos da malha computacional o valor da função H em $\eta = 0$ é obtido através da média dos valores dados nas linhas $n = 1$ e $n = 2$ das Tabs. 5.3 e 5.4, ou seja, em $\eta = \pm 1.3 \times 10^{-2}$.

Tabela 5.3: Valores da função H para os ângulos $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° no caso da viscosidade constante

n	η	55°	61°	62.4°	65°
1	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$-2.56 \cdot 10^{-8}$	$-5.802 \cdot 10^{-7}$	$-7.006 \cdot 10^{-7}$	$-9.133 \cdot 10^{-7}$
2	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.56 \cdot 10^{-8}$	$5.802 \cdot 10^{-7}$	$7.006 \cdot 10^{-7}$	$9.133 \cdot 10^{-7}$
3	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$-1.2036 \cdot 10^{-4}$	$-2.2879 \cdot 10^{-5}$	$3.532 \cdot 10^{-7}$	$4.3953 \cdot 10^{-5}$
4	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$-3.6127 \cdot 10^{-4}$	$-7.5382 \cdot 10^{-5}$	$-7.1124 \cdot 10^{-6}$	$1.2116 \cdot 10^{-4}$
5	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$-7.2267 \cdot 10^{-4}$	$-1.6114 \cdot 10^{-4}$	$-2.6833 \cdot 10^{-5}$	$2.2577 \cdot 10^{-4}$
6	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$-1.2044 \cdot 10^{-3}$	$-2.8415 \cdot 10^{-4}$	$-6.3715 \cdot 10^{-5}$	$3.5124 \cdot 10^{-4}$
7	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$-1.8063 \cdot 10^{-3}$	$-4.4821 \cdot 10^{-4}$	$-1.2244 \cdot 10^{-4}$	$4.9132 \cdot 10^{-4}$
8	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$-2.528 \cdot 10^{-3}$	$-6.569 \cdot 10^{-4}$	$-2.0746 \cdot 10^{-4}$	$6.3999 \cdot 10^{-4}$
9	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$-3.3689 \cdot 10^{-3}$	$-9.1359 \cdot 10^{-4}$	$-3.23 \cdot 10^{-4}$	$7.915 \cdot 10^{-4}$
10	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$-4.3285 \cdot 10^{-3}$	$-1.2215 \cdot 10^{-3}$	$-4.7309 \cdot 10^{-4}$	$9.4034 \cdot 10^{-4}$
11	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$-5.4062 \cdot 10^{-3}$	$-1.5835 \cdot 10^{-3}$	$-6.6152 \cdot 10^{-4}$	$1.0812 \cdot 10^{-3}$
12	$2.6 \cdot 10^{-1}$	$-6.6011 \cdot 10^{-3}$	$-2.0025 \cdot 10^{-3}$	$-8.9188 \cdot 10^{-4}$	$1.2091 \cdot 10^{-3}$
13	$2.9 \cdot 10^{-1}$	$-7.9125 \cdot 10^{-3}$	$-2.4811 \cdot 10^{-3}$	$-1.1675 \cdot 10^{-3}$	$1.3193 \cdot 10^{-3}$
14	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$-9.3392 \cdot 10^{-3}$	$-3.0216 \cdot 10^{-3}$	$-1.4917 \cdot 10^{-3}$	$1.4071 \cdot 10^{-3}$
15	$3.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0109	$-3.6263 \cdot 10^{-3}$	$-1.8673 \cdot 10^{-3}$	$1.4682 \cdot 10^{-3}$
16	$3.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0125	$-4.2973 \cdot 10^{-3}$	$-2.2972 \cdot 10^{-3}$	$1.4985 \cdot 10^{-3}$
17	$3.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0143	$-5.0364 \cdot 10^{-3}$	$-2.7839 \cdot 10^{-3}$	$1.4942 \cdot 10^{-3}$
18	$4.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0162	$-5.8454 \cdot 10^{-3}$	$-3.3299 \cdot 10^{-3}$	$1.4515 \cdot 10^{-3}$
19	$4.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0182	$-6.7257 \cdot 10^{-3}$	$-3.9373 \cdot 10^{-3}$	$1.367 \cdot 10^{-3}$
20	$4.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0203	$-7.6788 \cdot 10^{-3}$	$-4.6082 \cdot 10^{-3}$	$1.2374 \cdot 10^{-3}$
21	$4.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0225	$-8.7059 \cdot 10^{-3}$	$-5.3445 \cdot 10^{-3}$	$1.0597 \cdot 10^{-3}$
22	$5.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0248	$-9.8081 \cdot 10^{-3}$	$-6.1479 \cdot 10^{-3}$	$8.3097 \cdot 10^{-4}$
23	$5.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0272	-0.011	$-7.0199 \cdot 10^{-3}$	$5.4856 \cdot 10^{-4}$
24	$5.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0297	-0.0122	$-7.9619 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
25	$5.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0323	-0.0136	$-8.9751 \cdot 10^{-3}$	$-1.8701 \cdot 10^{-4}$
26	$6.1 \cdot 10^{-1}$	-0.035	-0.015	-0.0101	$-6.446 \cdot 10^{-4}$
27	$6.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0378	-0.0165	-0.0112	$-1.1647 \cdot 10^{-3}$
28	$6.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0407	-0.018	-0.0125	$-1.7491 \cdot 10^{-3}$
29	$6.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0437	-0.0197	-0.0138	$-2.3995 \cdot 10^{-3}$
30	$7.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0468	-0.0214	-0.0151	$-3.1172 \cdot 10^{-3}$
31	$7.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0499	-0.0232	-0.0166	$-3.9036 \cdot 10^{-3}$
32	$7.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0532	-0.0251	-0.0181	$-4.7598 \cdot 10^{-3}$
33	$7.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0565	-0.0271	-0.0197	$-5.6869 \cdot 10^{-3}$
34	$8.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0599	-0.0291	-0.0214	$-6.6857 \cdot 10^{-3}$

Tabela 5.4: Valores da função H para os ângulos $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° no caso da viscosidade variável

n	η	55°	61°	62.4°	65°
1	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	$-2.56 \cdot 10^{-8}$	$-5.802 \cdot 10^{-7}$	$-7.006 \cdot 10^{-7}$	$-9.133 \cdot 10^{-7}$
2	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.56 \cdot 10^{-8}$	$5.802 \cdot 10^{-7}$	$7.006 \cdot 10^{-7}$	$9.133 \cdot 10^{-7}$
3	$3.8 \cdot 10^{-2}$	$-1.2036 \cdot 10^{-4}$	$-2.2879 \cdot 10^{-5}$	$3.534 \cdot 10^{-7}$	$4.3953 \cdot 10^{-5}$
4	$6.3 \cdot 10^{-2}$	$-3.6127 \cdot 10^{-4}$	$-7.5382 \cdot 10^{-5}$	$-7.1119 \cdot 10^{-6}$	$1.2116 \cdot 10^{-4}$
5	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$-7.2267 \cdot 10^{-4}$	$-1.6114 \cdot 10^{-4}$	$-2.6832 \cdot 10^{-5}$	$2.2577 \cdot 10^{-4}$
6	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$-1.2044 \cdot 10^{-3}$	$-2.8415 \cdot 10^{-4}$	$-6.3714 \cdot 10^{-5}$	$3.5124 \cdot 10^{-4}$
7	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$-1.8063 \cdot 10^{-3}$	$-4.4821 \cdot 10^{-4}$	$-1.2244 \cdot 10^{-4}$	$4.9132 \cdot 10^{-4}$
8	$1.6 \cdot 10^{-1}$	$-2.528 \cdot 10^{-3}$	$-6.5689 \cdot 10^{-4}$	$-2.0745 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-4}$
9	$1.9 \cdot 10^{-1}$	$-3.3689 \cdot 10^{-3}$	$-9.1358 \cdot 10^{-4}$	$-3.23 \cdot 10^{-4}$	$7.9151 \cdot 10^{-4}$
10	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$-4.3285 \cdot 10^{-3}$	$-1.2215 \cdot 10^{-3}$	$-4.7308 \cdot 10^{-4}$	$9.4035 \cdot 10^{-4}$
11	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$-5.4062 \cdot 10^{-3}$	$-1.5835 \cdot 10^{-3}$	$-6.6151 \cdot 10^{-4}$	$1.0812 \cdot 10^{-3}$
12	$2.6 \cdot 10^{-1}$	$-6.6011 \cdot 10^{-3}$	$-2.0025 \cdot 10^{-3}$	$-8.9187 \cdot 10^{-4}$	$1.2092 \cdot 10^{-3}$
13	$2.9 \cdot 10^{-1}$	$-7.9125 \cdot 10^{-3}$	$-2.4811 \cdot 10^{-3}$	$-1.1675 \cdot 10^{-3}$	$1.3193 \cdot 10^{-3}$
14	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$-9.3392 \cdot 10^{-3}$	$-3.0216 \cdot 10^{-3}$	$-1.4917 \cdot 10^{-3}$	$1.4071 \cdot 10^{-3}$
15	$3.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0109	$-3.6263 \cdot 10^{-3}$	$-1.8673 \cdot 10^{-3}$	$1.4682 \cdot 10^{-3}$
16	$3.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0125	$-4.2973 \cdot 10^{-3}$	$-2.2972 \cdot 10^{-3}$	$1.4986 \cdot 10^{-3}$
17	$3.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0143	$-5.0364 \cdot 10^{-3}$	$-2.7839 \cdot 10^{-3}$	$1.4943 \cdot 10^{-3}$
18	$4.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0162	$-5.8454 \cdot 10^{-3}$	$-3.3299 \cdot 10^{-3}$	$1.4516 \cdot 10^{-3}$
19	$4.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0182	$-6.7257 \cdot 10^{-3}$	$-3.9373 \cdot 10^{-3}$	$1.3671 \cdot 10^{-3}$
20	$4.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0203	$-7.6788 \cdot 10^{-3}$	$-4.6082 \cdot 10^{-3}$	$1.2375 \cdot 10^{-3}$
21	$4.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0225	$-8.7059 \cdot 10^{-3}$	$-5.3445 \cdot 10^{-3}$	$1.0598 \cdot 10^{-3}$
22	$5.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0248	$-9.8081 \cdot 10^{-3}$	$-6.1479 \cdot 10^{-3}$	$8.3105 \cdot 10^{-4}$
23	$5.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0272	-0.011	$-7.0199 \cdot 10^{-3}$	$5.4865 \cdot 10^{-4}$
24	$5.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0297	-0.0122	$-7.9619 \cdot 10^{-3}$	$2.101 \cdot 10^{-4}$
25	$5.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0323	-0.0136	$-8.9751 \cdot 10^{-3}$	$-1.8691 \cdot 10^{-4}$
26	$6.1 \cdot 10^{-1}$	-0.035	-0.015	-0.0101	$-6.4449 \cdot 10^{-4}$
27	$6.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0378	-0.0165	-0.0112	$-1.1646 \cdot 10^{-3}$
28	$6.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0407	-0.018	-0.0125	$-1.749 \cdot 10^{-3}$
29	$6.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0437	-0.0197	-0.0138	$-2.3993 \cdot 10^{-3}$
30	$7.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0468	-0.0214	-0.0151	$-3.117 \cdot 10^{-3}$
31	$7.4 \cdot 10^{-1}$	-0.0499	-0.0232	-0.0166	$-3.9034 \cdot 10^{-3}$
32	$7.6 \cdot 10^{-1}$	-0.0532	-0.0251	-0.0181	$-4.7597 \cdot 10^{-3}$
33	$7.9 \cdot 10^{-1}$	-0.0565	-0.0271	-0.0197	$-5.6867 \cdot 10^{-3}$
34	$8.1 \cdot 10^{-1}$	-0.0599	-0.0291	-0.0214	$-6.6855 \cdot 10^{-3}$

O perfil de concentração C é exibido na Fig. 5.7 em vários valores do ângulo θ , os mesmos que a função H é exibida na Fig. 5.6, para comparação da influência do ângulo de descolamento na concentração da espécie química para o fluido com viscosidade ν variável.

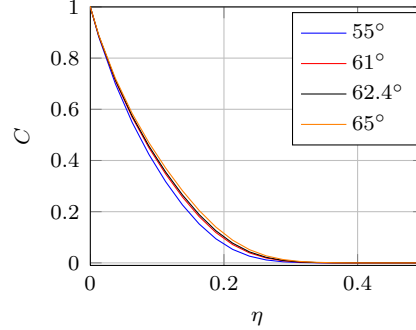


Figura 5.7: Perfil C para $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° com ν variável

Tabela 5.5: Valores da função C para os ângulos $\theta = 55^\circ, 61^\circ, 62.4^\circ$ e 65° no caso da viscosidade variável

n	η	55°	61°	62.4°	65°
1	$-1.3 \cdot 10^{-2}$	1.1163	1.1123	1.1113	1.1093
2	$1.3 \cdot 10^{-2}$	0.8837	0.8877	0.8887	0.8907
3	$3.8 \cdot 10^{-2}$	0.6991	0.7114	0.7145	0.7206
4	$6.3 \cdot 10^{-2}$	0.5489	0.5688	0.5739	0.5839
5	$8.8 \cdot 10^{-2}$	0.4236	0.4497	0.4565	0.4697
6	$1.1 \cdot 10^{-1}$	0.3171	0.3471	0.3549	0.3703
7	$1.4 \cdot 10^{-1}$	0.2266	0.2575	0.2656	0.282
8	$1.6 \cdot 10^{-1}$	0.152	0.1808	0.1887	0.2046
9	$1.9 \cdot 10^{-1}$	0.0939	0.1185	0.1254	0.1396
10	$2.1 \cdot 10^{-1}$	0.0526	0.0714	0.0769	0.0886
11	$2.4 \cdot 10^{-1}$	0.0262	0.0391	0.043	0.0517
12	$2.6 \cdot 10^{-1}$	0.0114	0.0191	0.0217	0.0275
13	$2.9 \cdot 10^{-1}$	$4.2432 \cdot 10^{-3}$	$8.3084 \cdot 10^{-3}$	$9.7534 \cdot 10^{-3}$	0.0132
14	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$1.331 \cdot 10^{-3}$	$3.159 \cdot 10^{-3}$	$3.8719 \cdot 10^{-3}$	$5.6563 \cdot 10^{-3}$
15	$3.4 \cdot 10^{-1}$	$3.448 \cdot 10^{-4}$	$1.0366 \cdot 10^{-3}$	$1.3369 \cdot 10^{-3}$	$2.1386 \cdot 10^{-3}$
16	$3.6 \cdot 10^{-1}$	$7.1255 \cdot 10^{-5}$	$2.8189 \cdot 10^{-4}$	$3.8445 \cdot 10^{-4}$	$6.7741 \cdot 10^{-4}$
17	$3.9 \cdot 10^{-1}$	$1.0425 \cdot 10^{-5}$	$5.548 \cdot 10^{-5}$	$8.0045 \cdot 10^{-5}$	$1.5501 \cdot 10^{-4}$
18	$4.1 \cdot 10^{-1}$	$4.98 \cdot 10^{-7}$	$4.2725 \cdot 10^{-6}$	$6.6646 \cdot 10^{-6}$	$1.4616 \cdot 10^{-5}$
19	$4.4 \cdot 10^{-1}$	$-1.533 \cdot 10^{-7}$	$-9.287 \cdot 10^{-7}$	$-1.3683 \cdot 10^{-6}$	$-2.7353 \cdot 10^{-6}$
20	$4.6 \cdot 10^{-1}$	$3.6 \cdot 10^{-9}$	$-1.56 \cdot 10^{-8}$	$-3.59 \cdot 10^{-8}$	$-1.189 \cdot 10^{-7}$
21	$4.9 \cdot 10^{-1}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$	$4.94 \cdot 10^{-8}$	$7.67 \cdot 10^{-8}$	$1.678 \cdot 10^{-7}$

5.16 Comparação das derivadas

Nesta seção apresentamos a comparação das derivadas dos perfis de velocidades, comparamos em relação ao fluido com viscosidade (ν) constante e variável em diferentes valores do ângulo θ .

5.16.1 Cálculo das derivadas

As derivadas das funções F , G e H foram calculadas através de um pós-processamento do código numérico, isto é, obtidos os resultados das funções, aplicamos as fórmulas de derivada centrada por diferenças finitas para 2 e 3 pontos, respectivamente, para a derivada de primeira e segunda ordem.

Assim, conforme visto na Sec. 3.2 do Cap. 3, as fórmulas aplicadas foram:

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta x} \quad \text{e} \quad f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta x^2}$$

onde $i - 1, i, i + 1$ são pontos da malha uniforme.

Nas Figs. 5.8 a 5.12 exibimos os gráficos das derivadas de primeira e segunda ordem dos perfis adimensionais de velocidade F , G e H .

Para $\theta = 20^\circ$

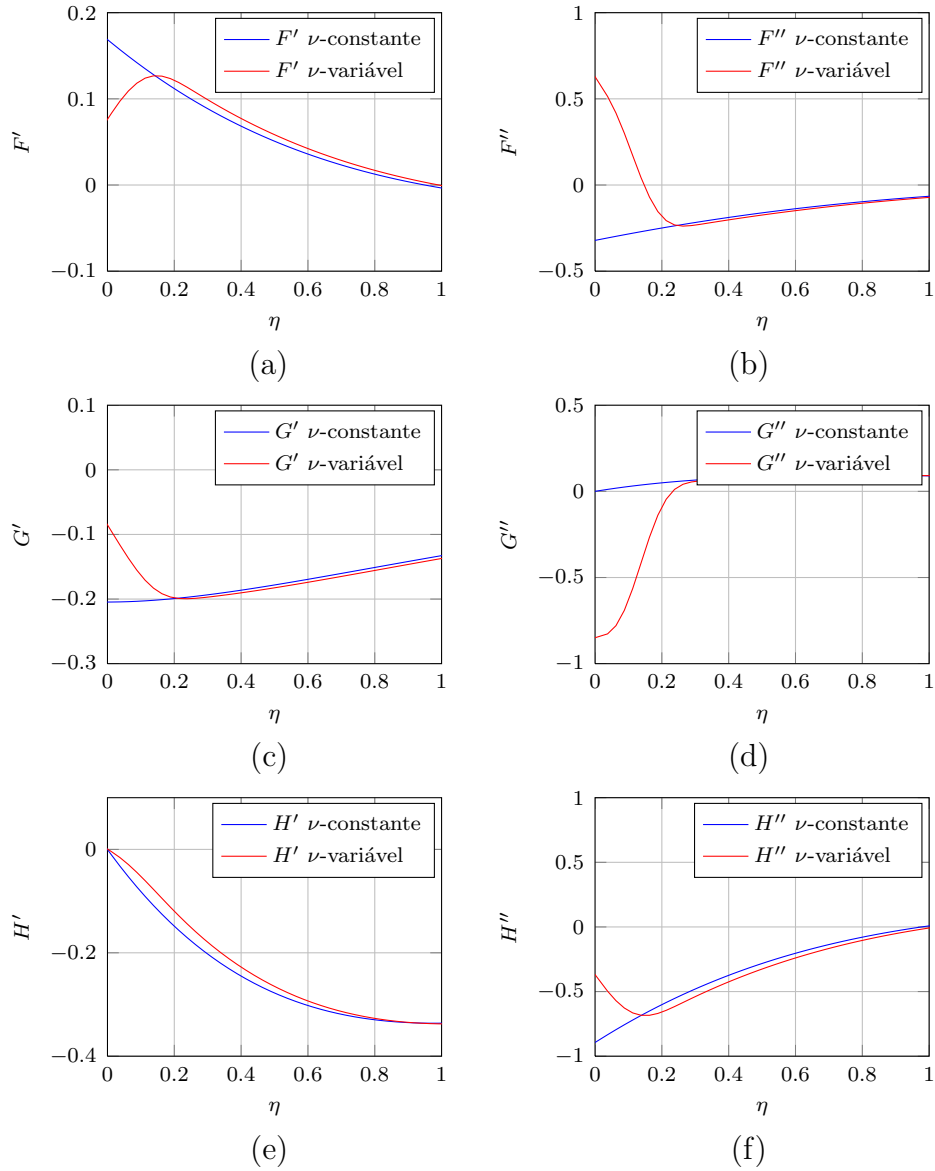


Figura 5.8: Perfis F' , F'' , G' , G'' , H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 20^\circ$

Para $\theta = 40^\circ$

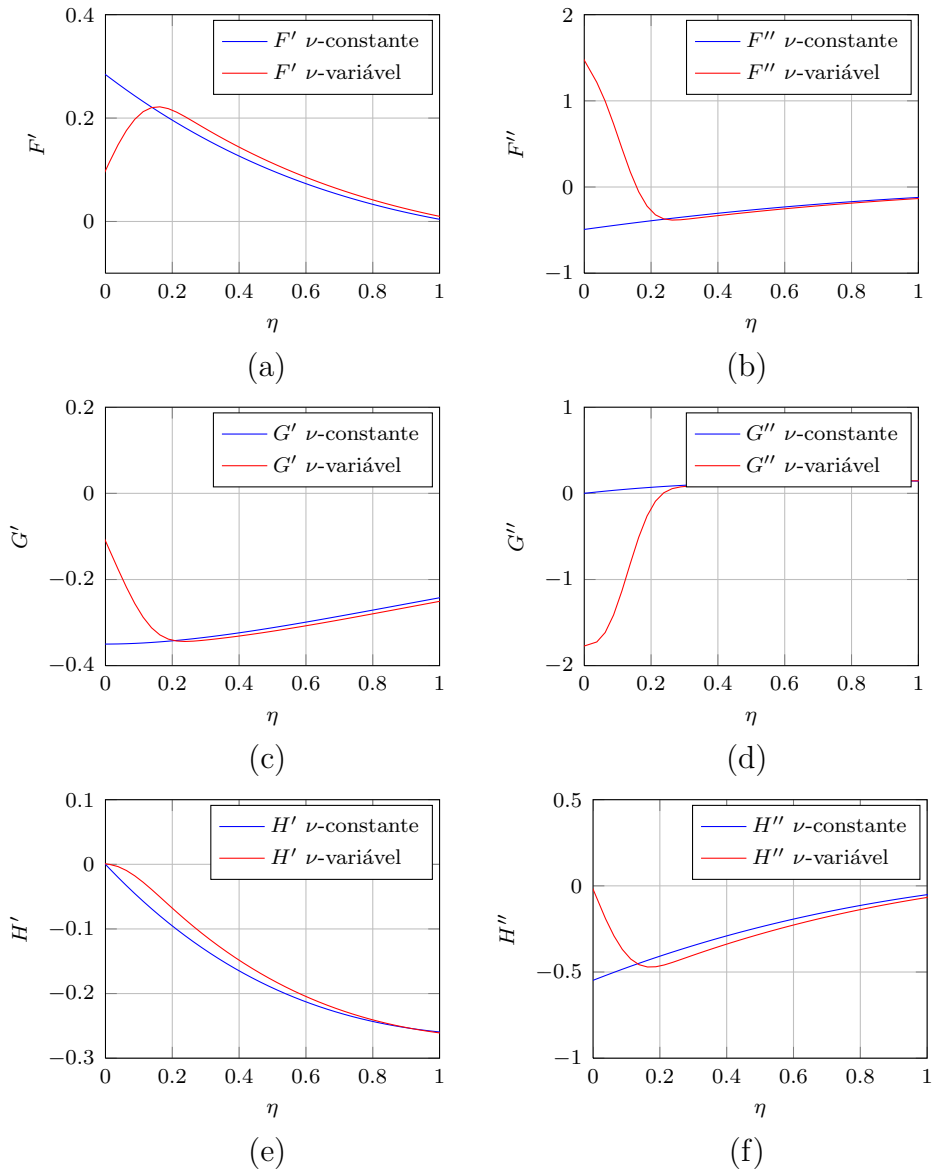


Figura 5.9: Perfis F' , F'' , G' , G'' , H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 40^\circ$

Para $\theta = 60^\circ$

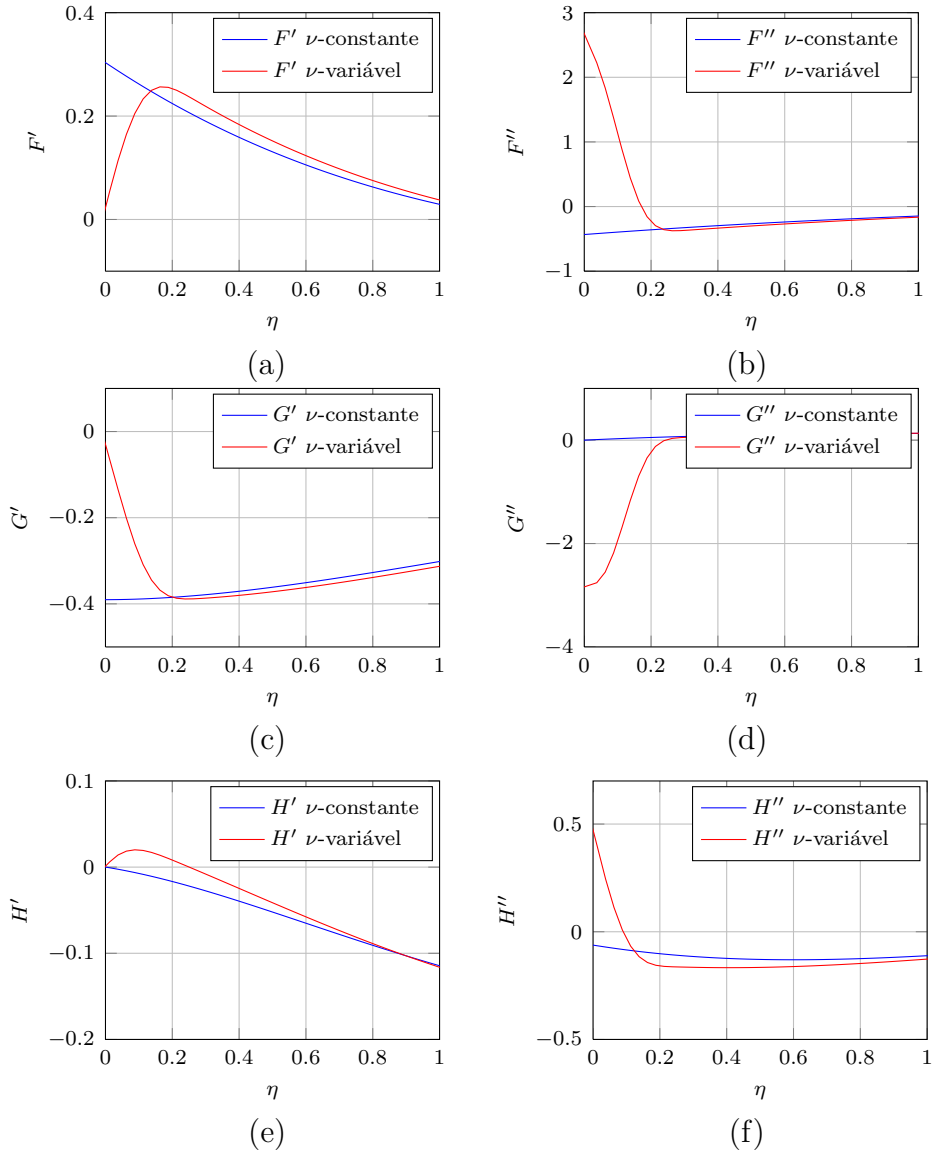
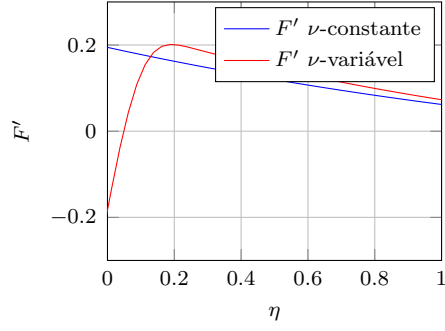
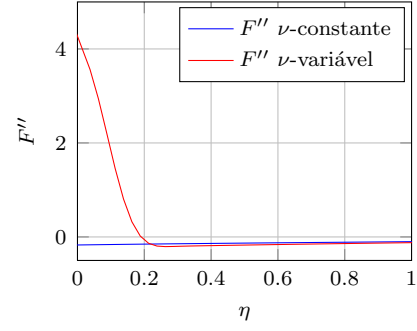


Figura 5.10: Perfis F' , F'' , G' , G'' , H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 60^\circ$

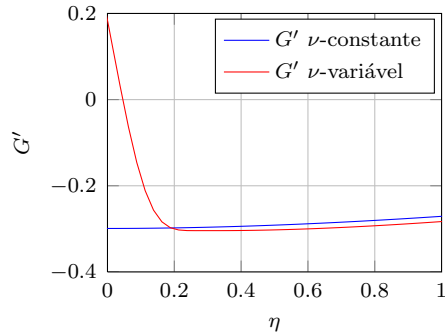
Para $\theta = 80^\circ$



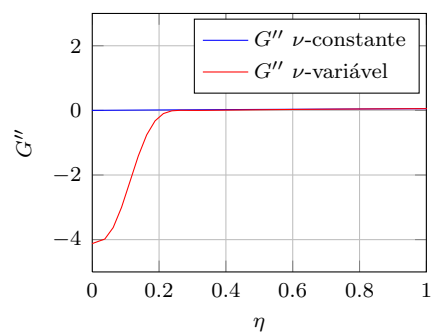
(a)



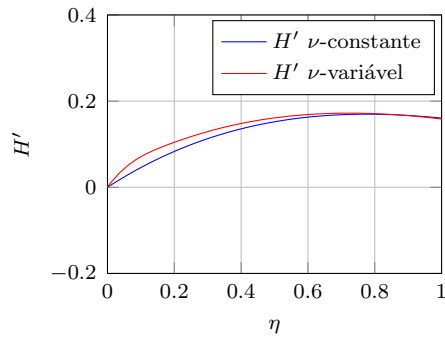
(b)



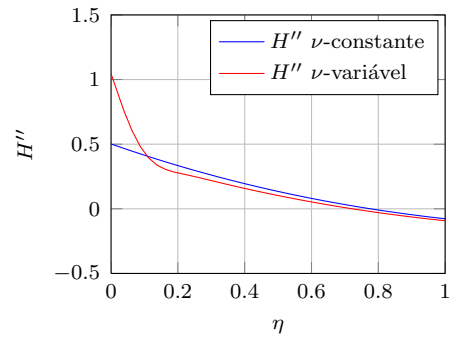
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 5.11: Perfis F' , F'' , G' , G'' , H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 80^\circ$

Para $\theta = 90^\circ$

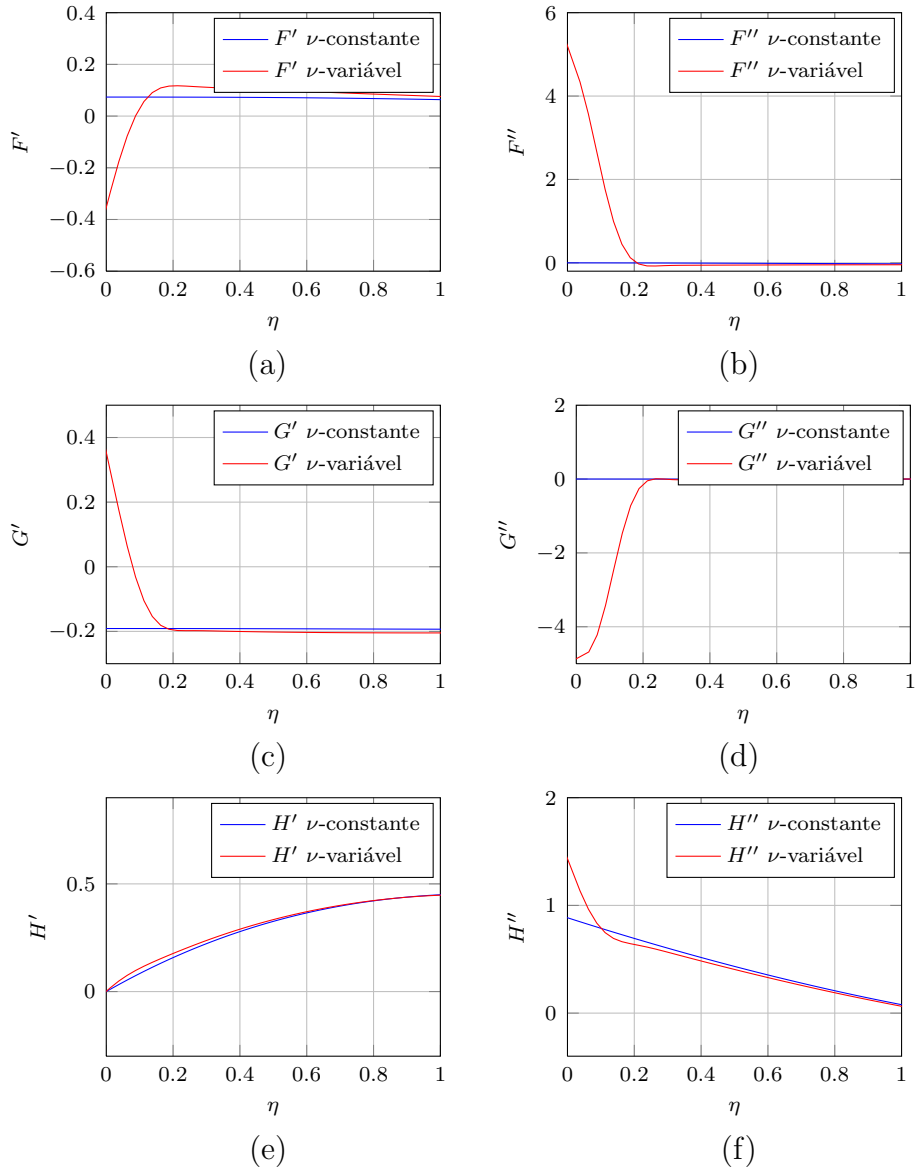


Figura 5.12: Perfis F' , F'' , G' , G'' , H' e H'' para os casos de viscosidades variável e constante em $\theta = 90^\circ$

Como visto, na Seção 5.13 e no Apêndice A os perfis F , G e H para o caso da viscosidade variável são similares ao caso do fluido com viscosidade constante. Entretanto, o fato da viscosidade do fluido variar causa influência nas derivadas de primeira e segunda ordem das funções F , G e H nas proximidades da superfície da semi-esfera (Figs. 5.8 a 5.12), ou seja, os perfis de velocidade são similares porém as derivadas na superfície são diferentes, com exceção da derivada de primeira ordem de H .

Capítulo 6

Resultados numéricos através do Método dos Elementos Finitos

Neste capítulo apresentamos o resultados de malha e numéricos obtidos para o campo hidrodinâmico de uma célula eletroquímica com eletrodo semi-esférico rotatório.

6.1 Um pouco do código

As simulações numéricas foram realizadas em um código de Método dos elementos finitos desenvolvido em linguagem C++. Este código vem recebendo modificações e aperfeiçoamentos por um grupo de pesquisadores que estudaram o problema do eletrodo com disco rotatório de células eletroquímicas citados no capítulo de Introdução (ver Cap. 1).

Sendo assim, para este trabalho criamos funções que adaptaram o código para o problema do eletrodo semi-esférico rotatório, pois, a princípio, havia sido desenvolvido apenas para resolver problemas da geometria de um disco rotatório. Em termos de sistema de coordenadas, o código utiliza o sistema cartesiano para suas equações

6.2 Malha computacional

A malha computacional desenvolvida para o disco rotatório tratava-se de um cilindro que simulava o domínio da célula eletroquímica em que o disco é imerso em um eletrólito. A princípio, para o problema do eletrodo semi-esférico utilizamos o mesmo cilindro, porém onde antes havia o disco transformamos, através de funções em C++, em uma semi-esfera. A Fig. 6.1(a) mostra a malha para o disco rotatório e a Fig. 6.1(b) a malha utilizada inicialmente para o eletrodo semi-esférico.

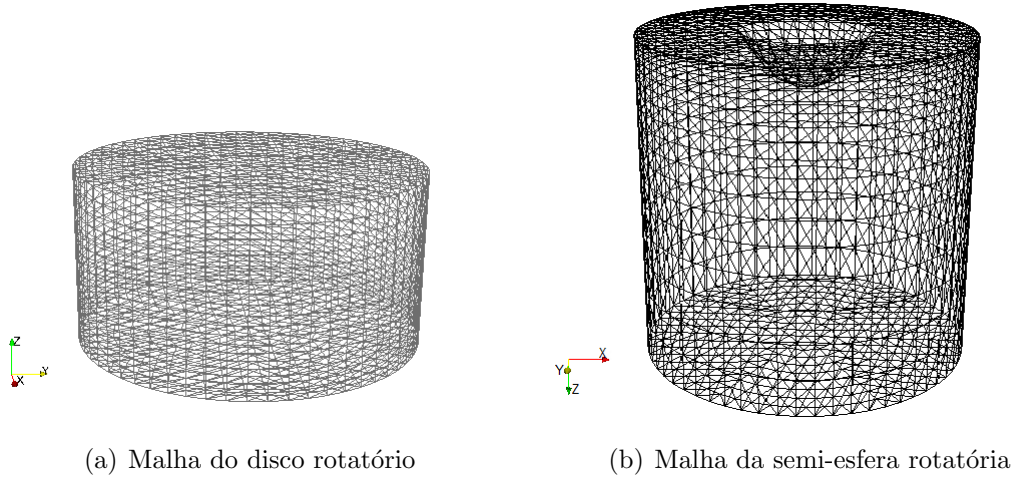


Figura 6.1: Malhas computacionais

Os resultados obtidos com a malha da Fig. 6.1(b) não foram satisfatórios, devido a geometria da semi-esfera. Como Godinez[5] obteve o campo hidrodinâmico sob a hipótese da camada limite, reformulamos a malha de forma que o domínio seja representado principalmente pela camada limite satisfazendo a condição do número de Reynolds elevado. A Fig. 6.2 exibe a malha computacional reformulada para o problema do eletrodo semi-esférico rotatório.

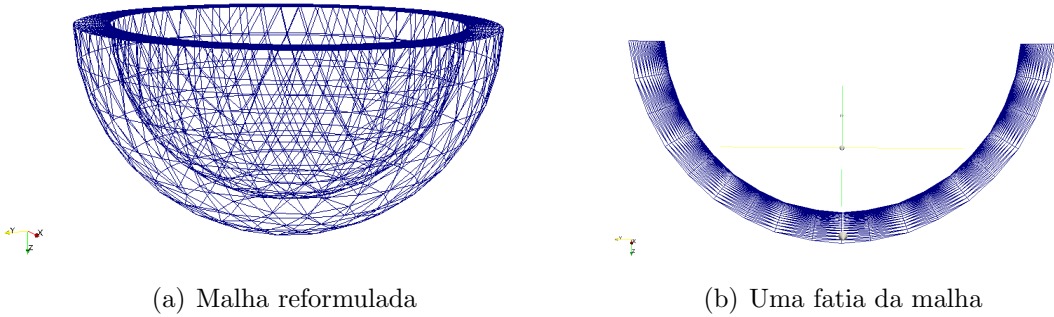


Figura 6.2: Malha computacional semi-esférica reformulada

6.2.1 Estrutura da malha

A malha é produzida com a seguinte estrutura:

$$(nPoligono, nCirculos, nZ)$$

onde $nPoligono$ é número de lados do primeiro polígono, $nCirculos$ é o número de círculos e nZ é número de pontos em z .

Após a transformação dessa malha cilíndrica para a semi-esférica, exibida pela Fig. 6.2, essa estrutura permanece, porém a direção em z torna-se a direção radial

e os círculos a direção meridional.

6.3 Condições de Contorno

A Fig. 6.3 auxilia na compreensão da aplicação das condições de contorno. Desta forma, as condições de contorno impostas na semi-esfera foram:

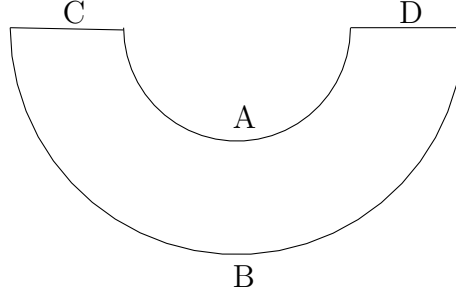


Figura 6.3: Condições de contorno da semi-esfera

- Na superfície sólida da semi-esfera (parte A da Fig. 6.3): foi imposta a velocidade $v_z = 0$ e as velocidades $v_x = -\bar{\Omega}y$ e $v_y = \bar{\Omega}x$, onde $\bar{\Omega}$ é a velocidade angular da semi-esfera.
- Na fronteira B (parte B da Fig. 6.3):
 1. Condições de contorno de Dirichlet para a velocidade: $\mathbf{v} = 0$ e condições de contorno de Neumann para pressão: $\mathbf{n} \cdot \nabla p = 0$;
 2. Condições de contorno de Neumann para a velocidade: $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$ e condições de contorno de Dirichlet: $p = 0$.
- Em C e D (da Fig. 6.3) impomos a pressão igual a zero.

O código numérico, que soluciona as equações, utiliza o sistema de coordenadas cartesianas, por isso, na superfície do eletrodo impomos as condições de contorno para as velocidades v_x, v_y e v_z e não para v_r, v_θ e v_ϕ do sistema de coordenadas esféricas, que é o sistema utilizado para o equacionamento do problema.

6.4 Resultados qualitativos

Apresentamos nesta seção os resultados de forma qualitativa, mostrando o comportamento do escoamento do fluido em diferentes instantes de tempo, na magnitude da velocidade e nas componentes do vetor velocidade. Para todos os casos analisados os campos de velocidade são qualitativamente corretos, a partir de ângulos de

θ maiores que 60° as soluções apresentam uma recirculação devida a condição de contorno de pressão constante imposta em $\theta = 90^\circ$.

6.4.1 Para a malha (6, 18, 20) com $R = 55$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Consideramos R o raio do domínio da semi-esfera, sendo $R = r_0 + dr$, onde r_0 é o raio interno da semi-esfera e dr é a espessura da semi-esfera. Para este caso, $r_0 = 40$ e $dr = 15$. Por esta razão, $R = 55$.

Magnitude da velocidade

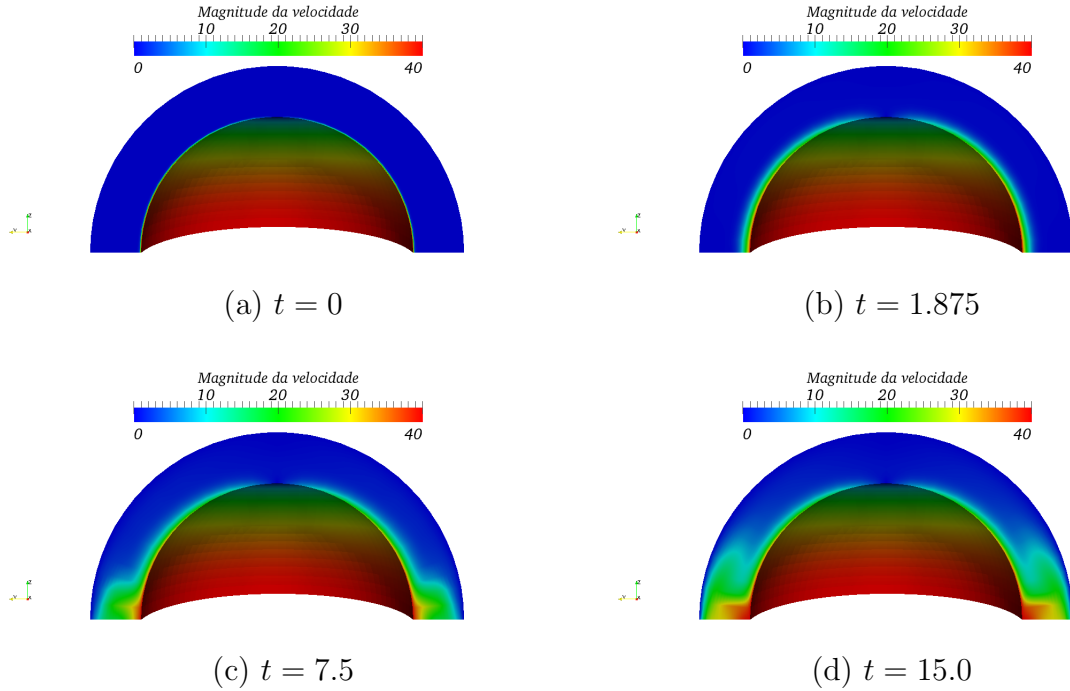


Figura 6.4: Magnitude da Velocidade

Componente x da velocidade

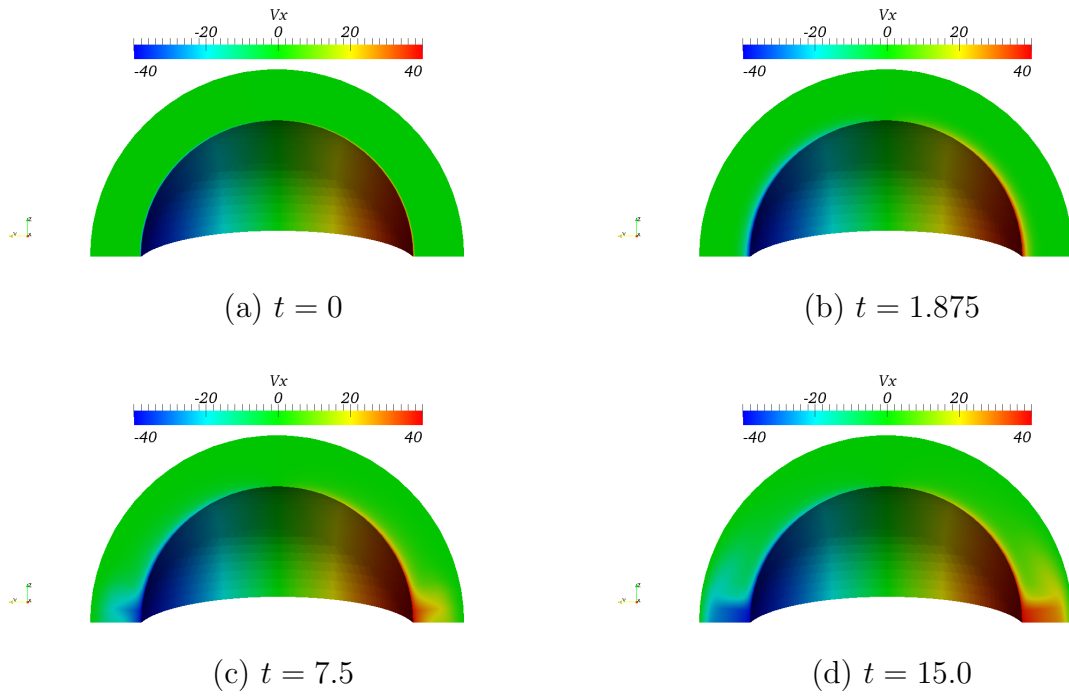


Figura 6.5: Componente x da velocidade

Componente y da velocidade

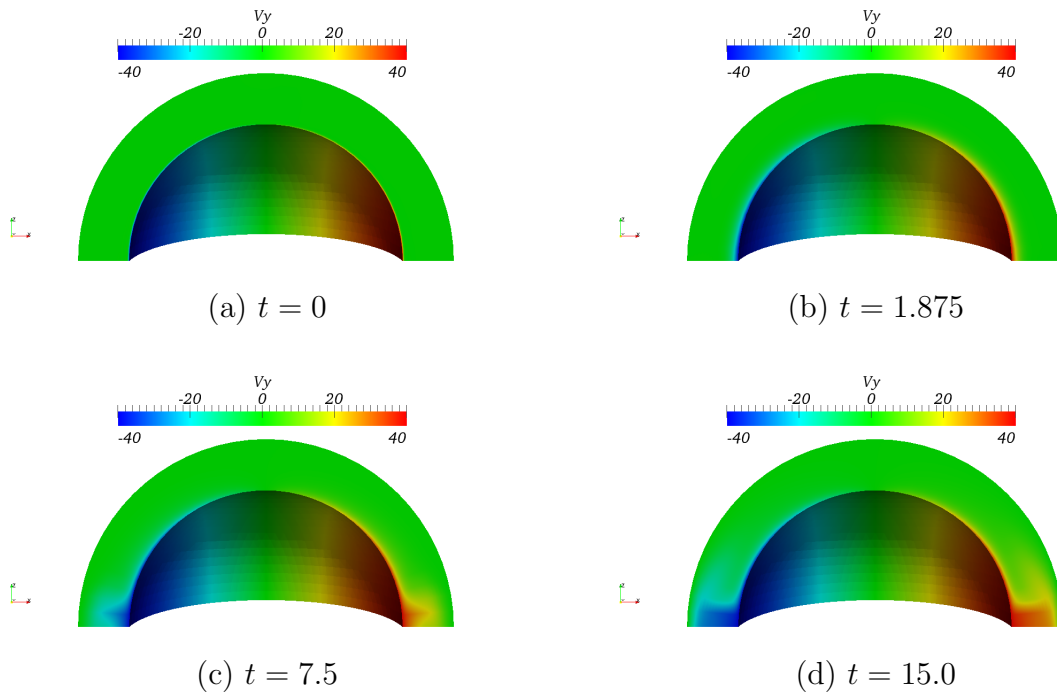


Figura 6.6: Componente y da velocidade

Componente z da velocidade

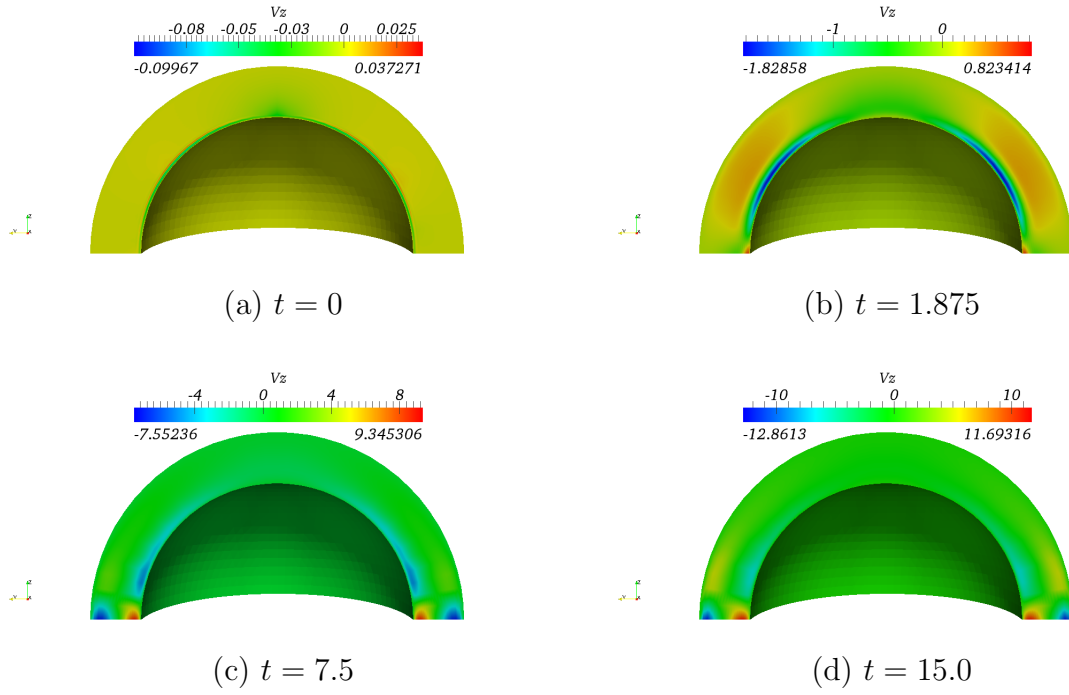


Figura 6.7: Componente z da velocidade

6.4.2 Para a malha $(6, 18, 20)$ com $R = 55$ com condições de contorno de Neumann para velocidade e de Dirichlet para pressão

Neste caso, temos $r_0 = 40$ e $dr = 15$, com condições de contorno de Neumann. Ou seja, $R = 55$.

Magnitude da velocidade

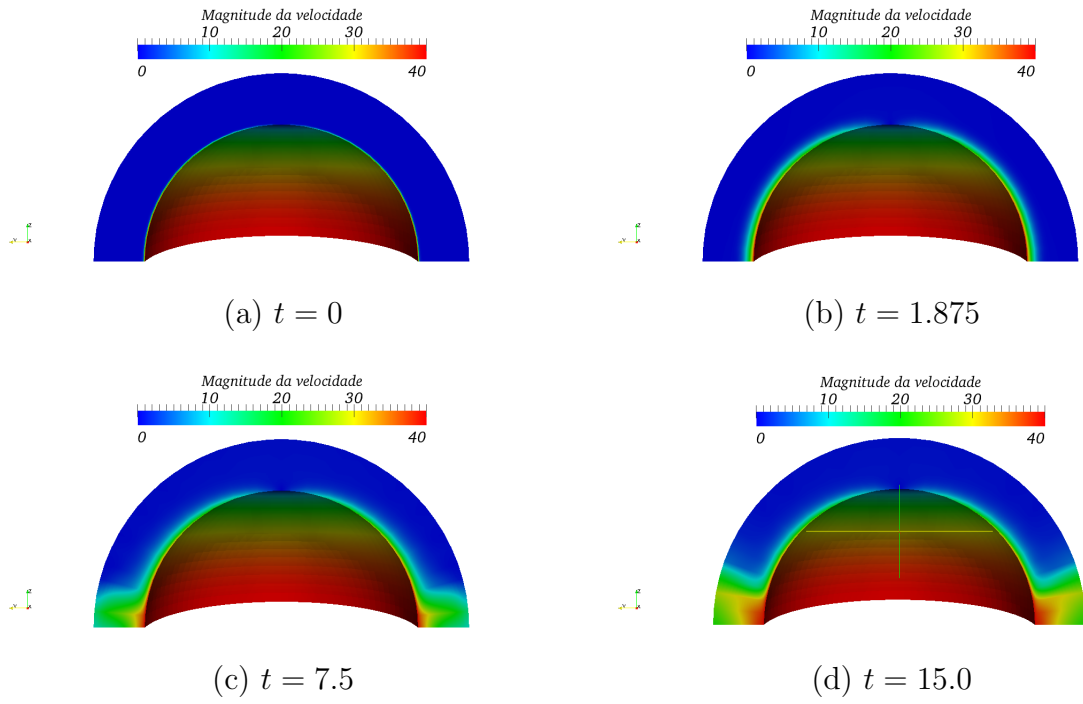


Figura 6.8: Magnitude da Velocidade

Componente x da velocidade

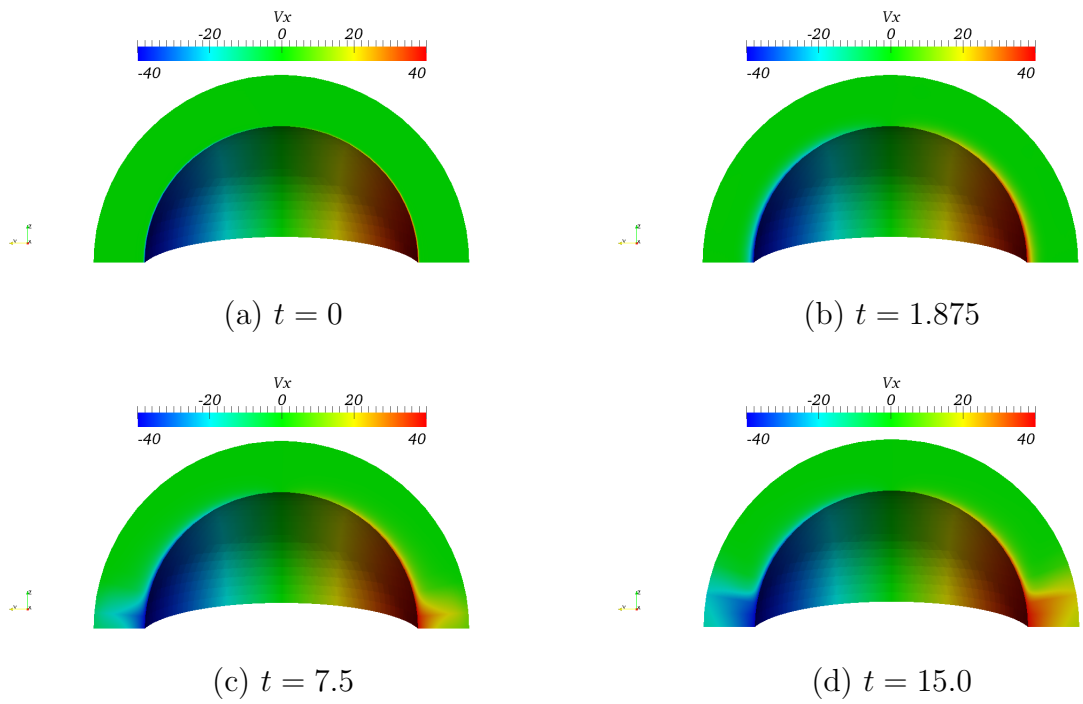


Figura 6.9: Componente x da velocidade

Componente y da velocidade

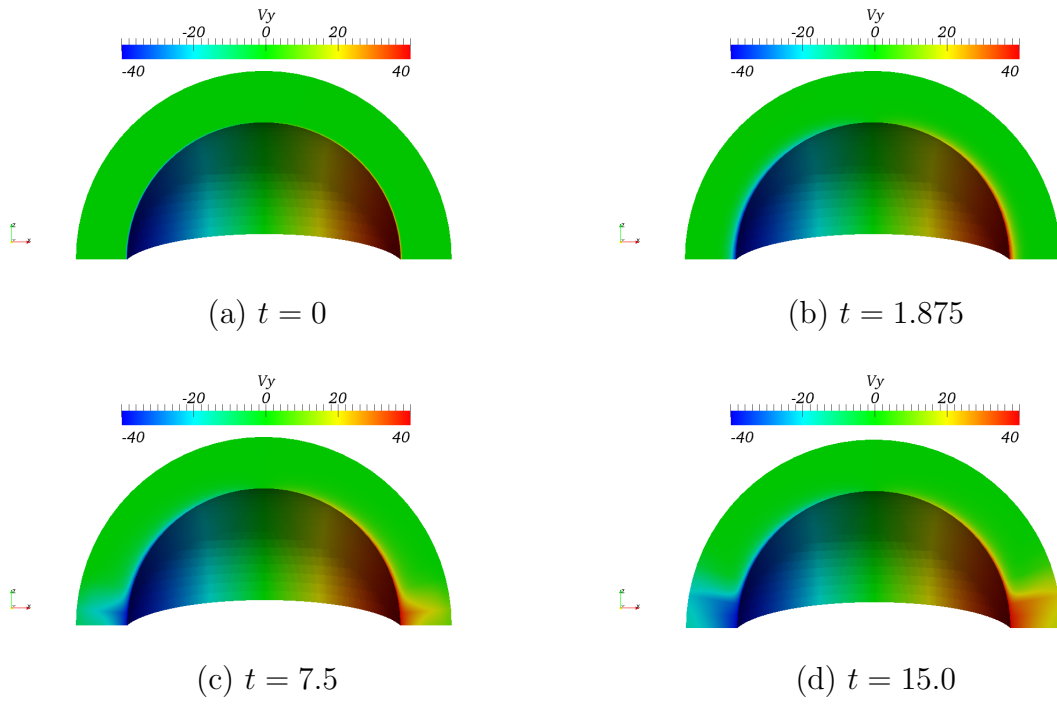


Figura 6.10: Componente y da velocidade

Componente z da velocidade

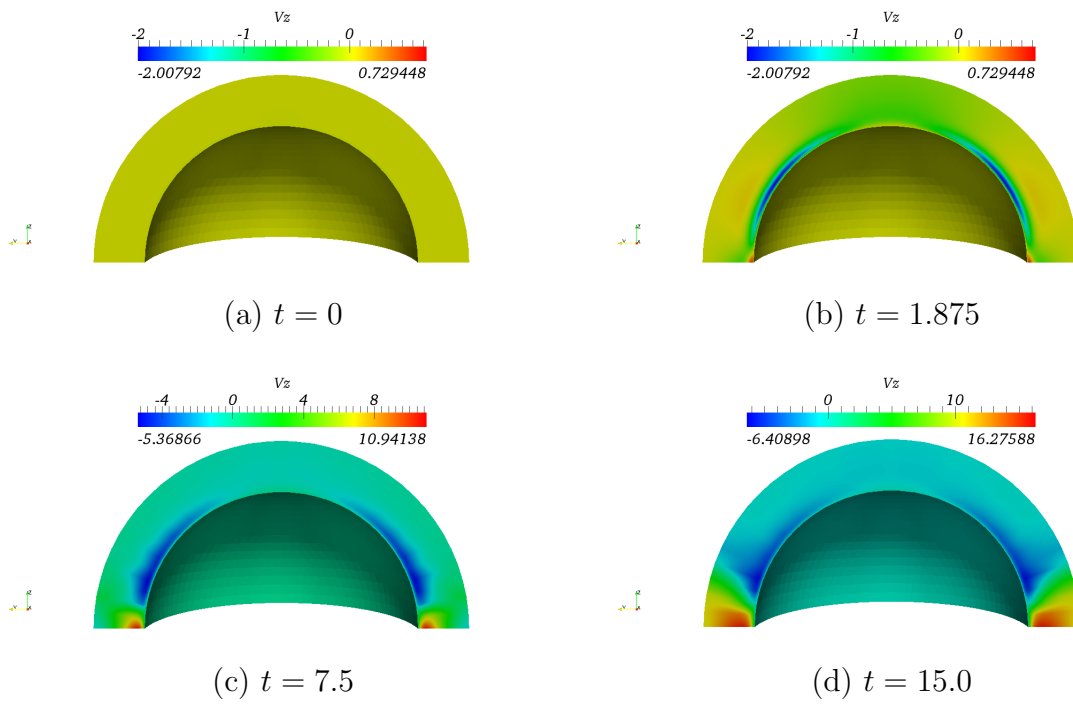


Figura 6.11: Componente z da velocidade

6.4.3 Para a malha $(6, 18, 30)$ com $R = 60$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Neste caso, temos $r_0 = 40$ e $dr = 20$. Por esta razão, $R = 60$.

Magnitude da velocidade

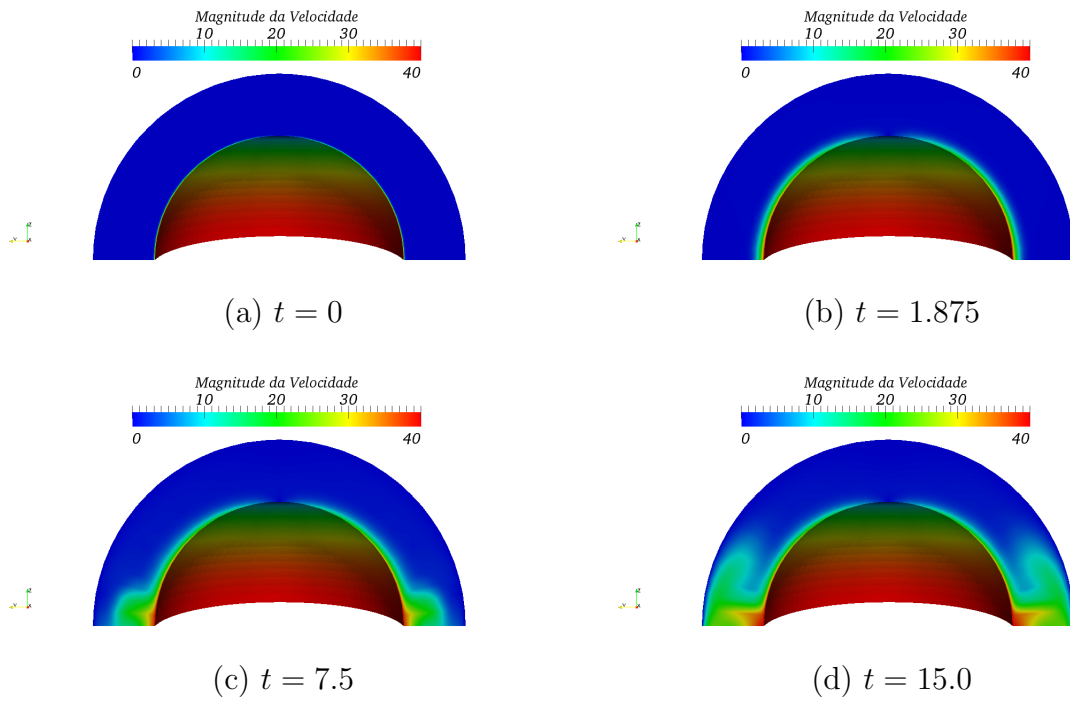


Figura 6.12: Magnitude da Velocidade

Componente x da velocidade

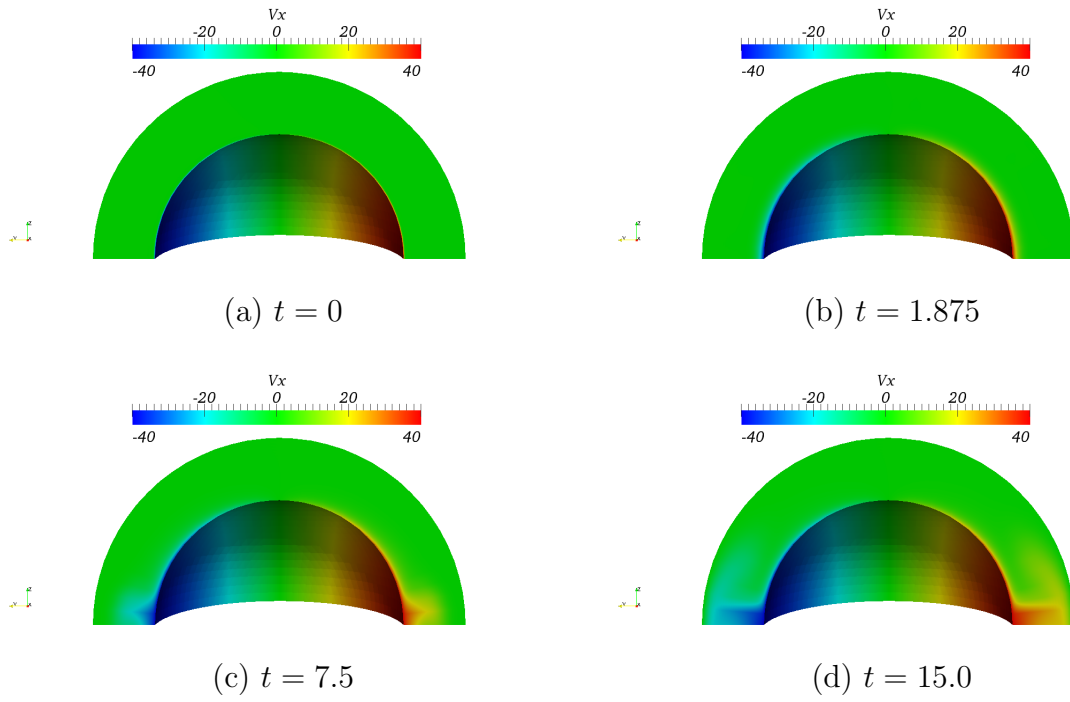


Figura 6.13: Componente x da velocidade

Componente y da velocidade

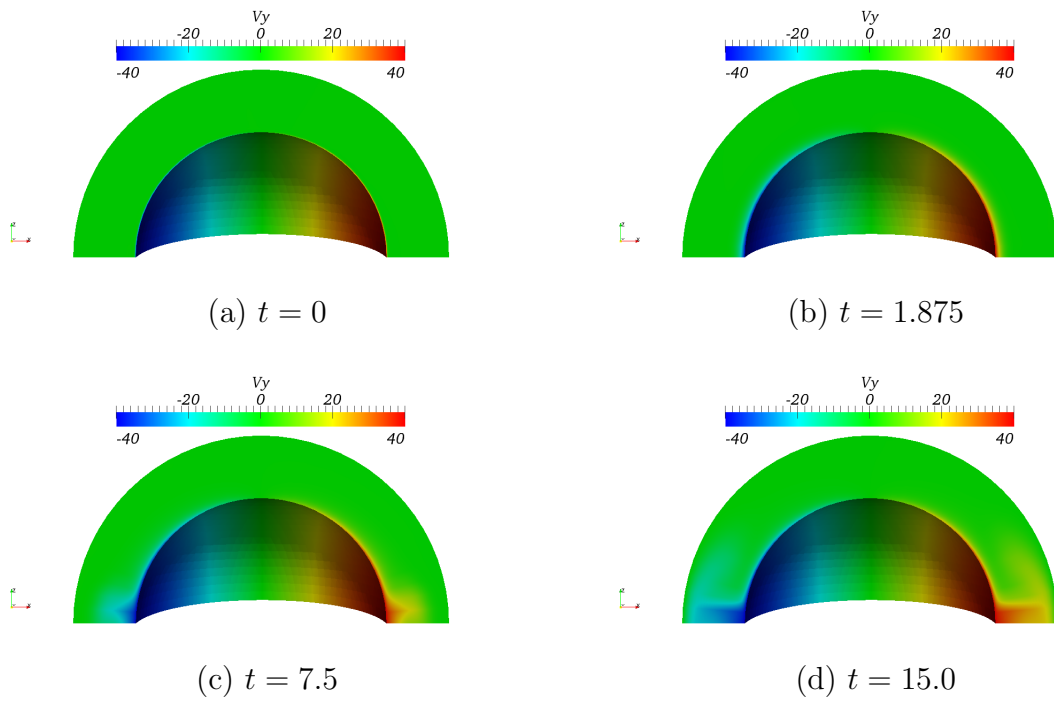


Figura 6.14: Componente y da velocidade

Componente z da velocidade

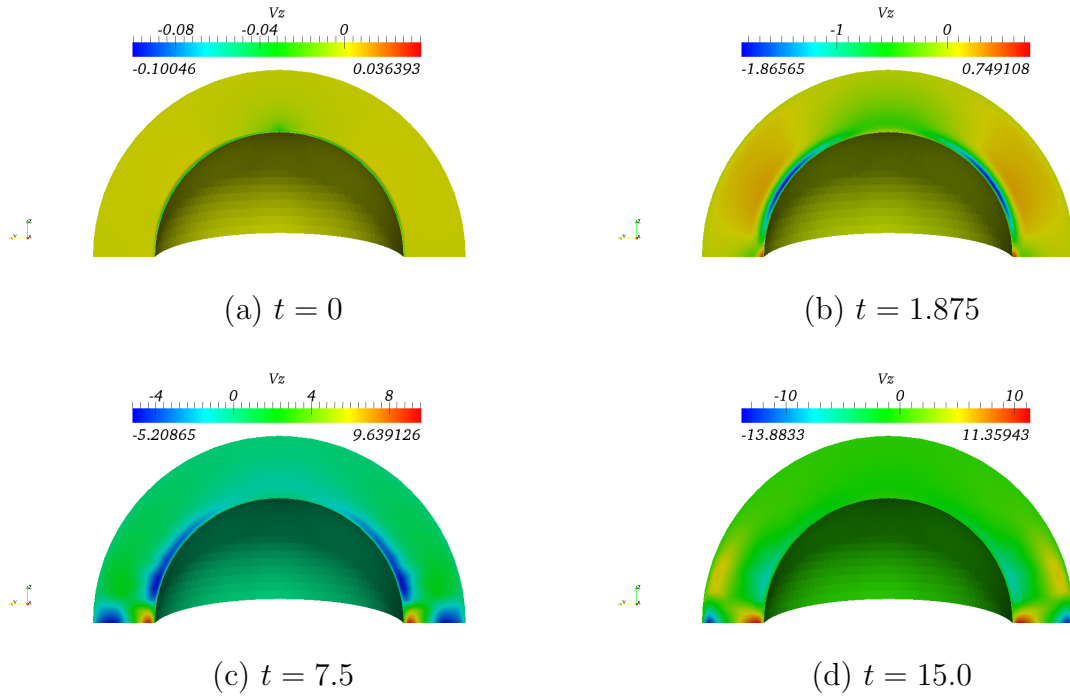


Figura 6.15: Componente z da velocidade

Na Seção 6.5 exibimos os perfis de velocidade observados em diferentes ângulos de θ e ϕ .

6.5 Resultados quantitativos

Exibimos nesta seção os perfis de velocidade para as malhas com estrutura: (6, 18, 20) com $R = 55$ para as condições de contorno de Dirichlet e de Neumann para a velocidade, respectivamente e condições de contorno de Neumann e de Dirichlet para a pressão, respectivamente; e para a malha com estrutura: (6, 18, 30) com $R = 60$ com as condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão.

6.5.1 Para a malha (6, 18, 20) com $R = 55$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Para $\theta = 5, 10, 15$ e 20°

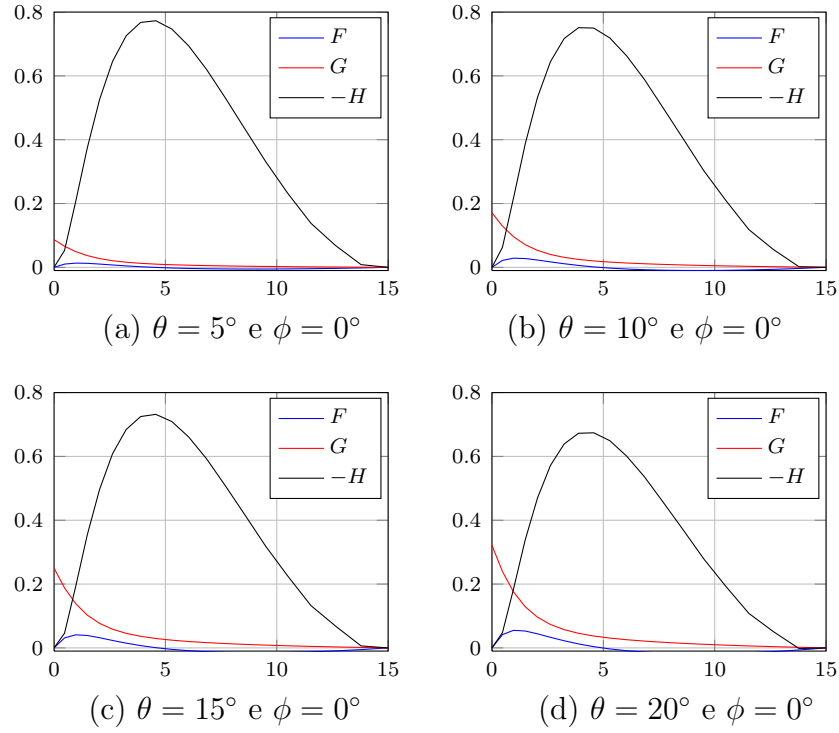


Figura 6.16: Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Para $\theta = 40, 60, 80$ e 90°

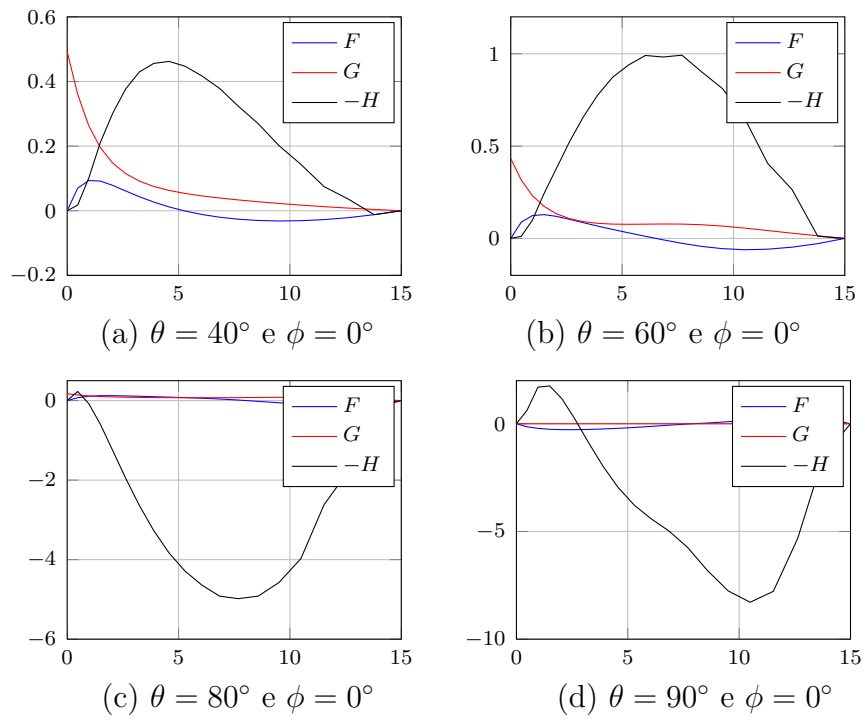


Figura 6.17: Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

6.5.2 Para a malha (6, 18, 20) com $R = 55$ com condições de contorno de Neumann para velocidade e de Dirichlet para pressão

Para $\theta = 5, 10, 15$ e 20°

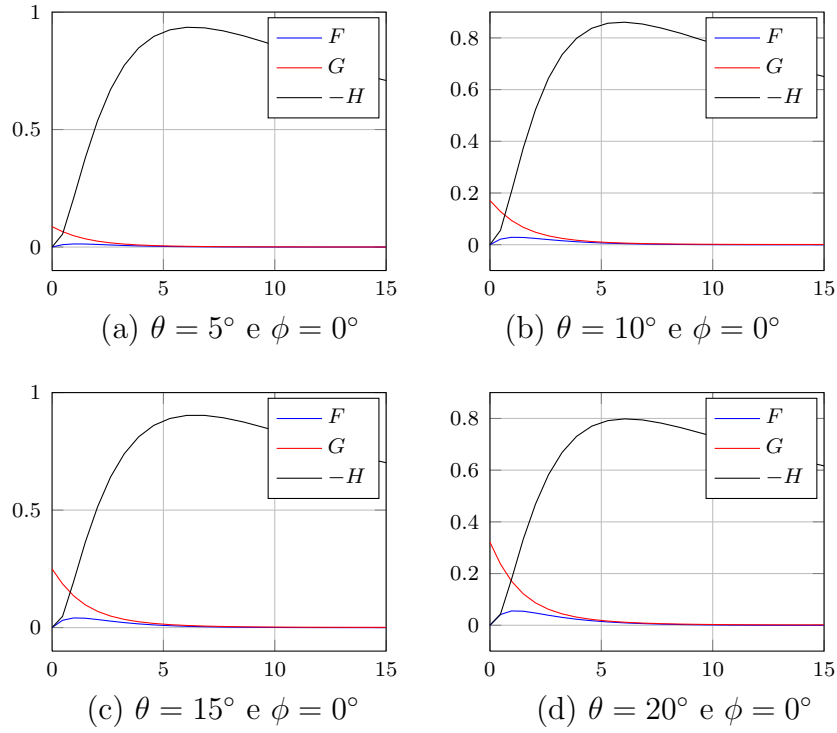


Figura 6.18: Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$ com condições de contorno de Neumann para velocidade e de Dirichlet para pressão

Para $\theta = 40, 60, 80$ e 90°

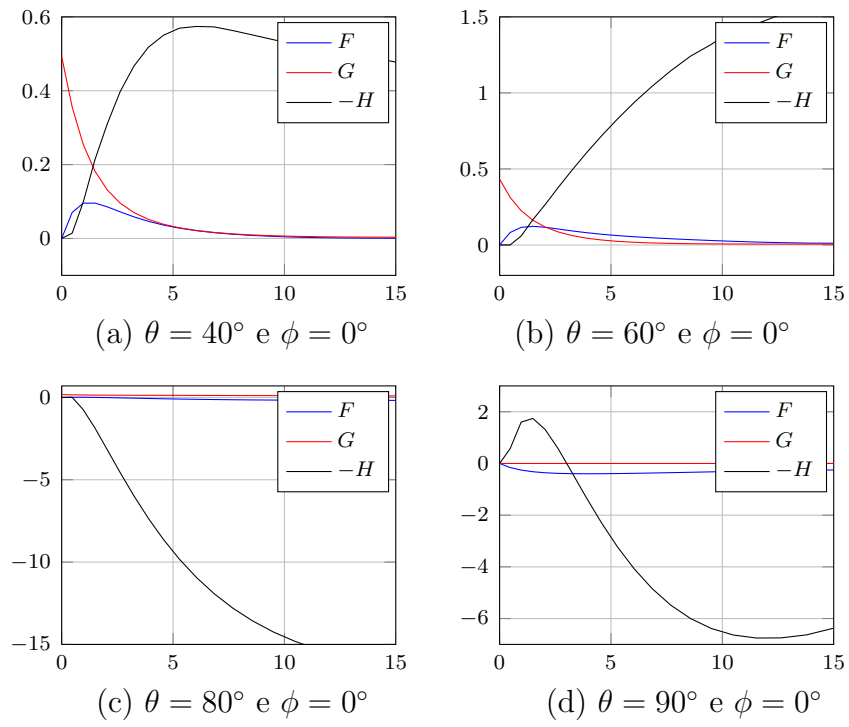


Figura 6.19: Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 55$ com condições de contorno de Neumann para velocidade e de Dirichlet para pressão

6.5.3 Para a malha (6, 18, 30) com $R = 60$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Para $\theta = 5, 10, 15$ e 20°

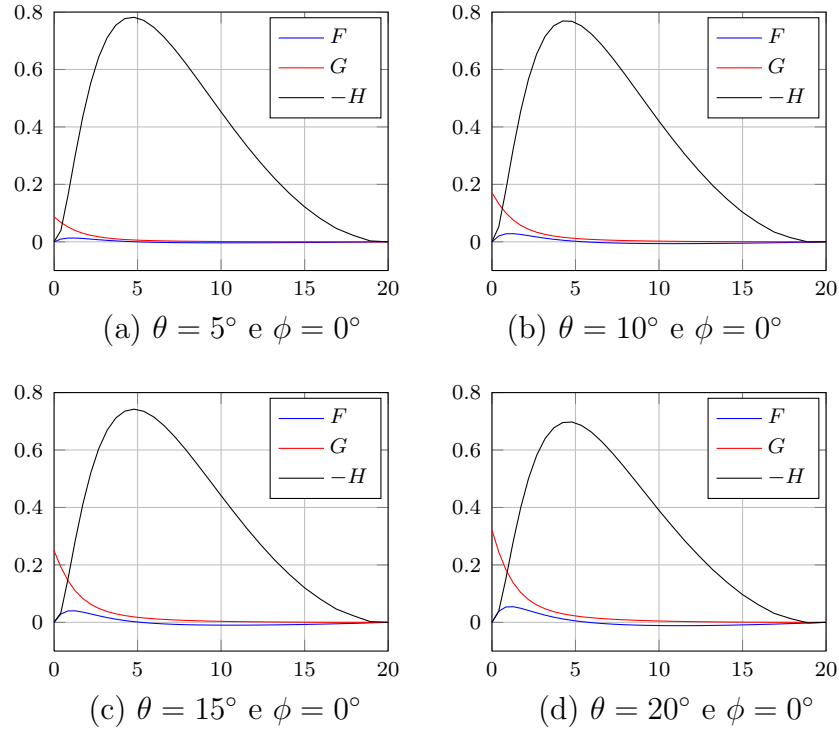


Figura 6.20: Perfis $\theta = 5, 10, 15$ e 20° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 60$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Para $\theta = 40, 60, 80$ e 90°

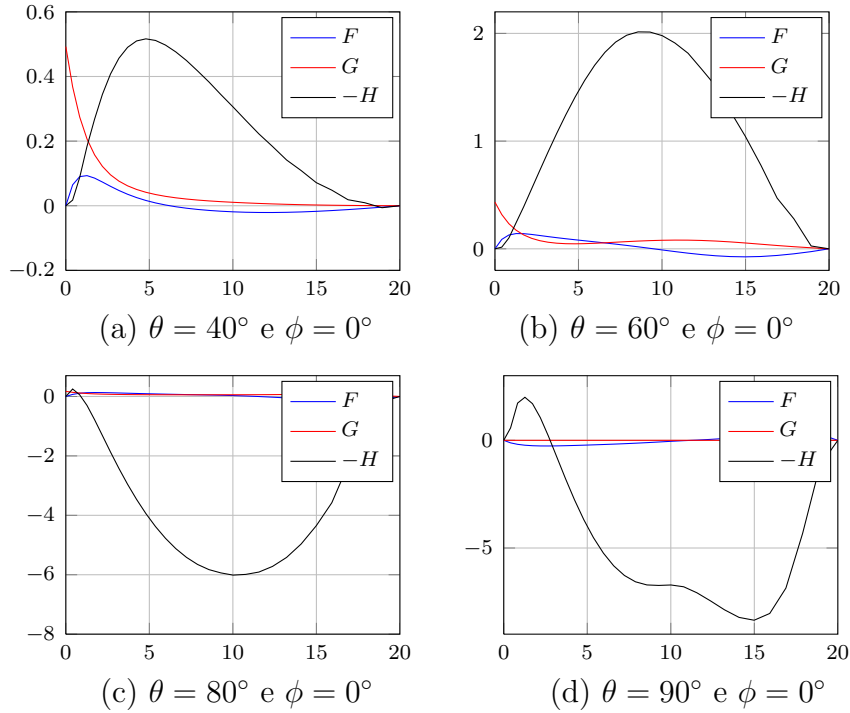


Figura 6.21: Perfis $\theta = 40, 60, 80$ e 90° e $\phi = 0^\circ$ para $R = 60$ com condições de contorno de Dirichlet para velocidade e de Neumann para pressão

Os perfis exibidos nas Figs. 6.16 e 6.20 mostram que a função H não tem o comportamento encontrado na solução analítica, em que tende assintoticamente para um valor constante fora da camada limite. Isto é devido a condição de contorno de Dirichlet que obriga o valor de H ser nulo na fronteira externa. A Fig. 6.18 mostra que com a imposição da condição de contorno de Neumann a função H tende ao valor esperado da solução analítica.

Nas Figs. 6.16, 6.20 e 6.18, as funções F e G apresentam bons resultados, mas a partir de um certo raio a função F torna-se negativa para equilibrar o balanço de massa. Note que para as condições de Neumann (Figs. 6.18 e 6.19) essa inversão de sinal da função F é muito menor e ocorre para ângulos superiores aos das condições de Dirichlet (ver Figs. 6.16-6.21)

Para ângulos próximos de 90° a solução se afasta da solução analítica devido a condição de contorno de pressão constante em $\theta = 90^\circ$.

6.5.4 Comparação dos resultados quantitativos

Os dados exibidos nas Tabs. 6.1-6.8 indicam para F o maior valor do perfil, para G o ponto inicial e para H o menor valor do perfil que deveria ser o valor assintótico fora da camada limite.

Tabela 6.1: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 5^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.01575	0.01326	0.0132	0.0131
G	0.08715	0.08682	0.0868	0.0868
H	-0.8832	-0.7727	-0.9351	-0.7817

Tabela 6.2: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 10^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.03135	0.02871	0.0286	0.0285
G	0.01737	0.1710	0.1710	0.1710
H	-0.8796	-0.7510	-0.8607	-0.7688

Tabela 6.3: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 15^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.04663	0.0409	0.0412	0.0401
G	0.2589	0.2500	0.2500	0.2500
H	-0.8734	-0.7318	-0.9030	-0.7423

Tabela 6.4: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 20^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.0615	0.05505	0.0554	0.0545
G	0.34205	0.3214	0.3214	0.3214
H	-0.8649	-0.6740	-0.7984	-0.6976

Tabela 6.5: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 40^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.1134	0.0935	0.0958	0.0932
G	0.6428	0.4924	0.4924	0.4924
H	-0.8058	-0.4622	-0.5741	-0.5165

Tabela 6.6: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 60^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.1458	0.1289	0.1226	0.1415
G	0.8660	0.4330	0.4330	0.4330
H	-0.7057	-0.9924	-1.5592	-2.0140

Tabela 6.7: Comparação de malhas e condições de contorno para $\theta = 80^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.1451	0.1234	0.0117	0.1323
G	0.9848	0.1710	0.1710	0.1710
H	-0.5570	-0.2284	-0.0060	-0.2515

Tabela 6.8: Comparação de malhas para e condições de contorno $\theta = 90^\circ$

Perfis	Resultados em 2D	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 20), $R = 55$, $t = 15.0$, c.c. Neumann em \mathbf{v}	Malha (6, 18, 30), $R = 60$, $t = 15.0$, c.c. Dirichlet em \mathbf{v}
F	0.1305	0.3215	0.0000	0.3471
G	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
H	-0.4540	-1.7561	-1.7421	-1.9978

Podemos inferir, das Tabs. 6.1-6.5, que aumentando o domínio do problema (aumentando proporcionalmente o número de pontos da malha) os resultados são melhores, em que a função H se aproxima do valor mínimo estacionário e a função F se aproxima do valor máximo, reduzindo os valores negativos de F . Para ângulos maiores o efeito da recirculação torna os resultados mais distantes da solução analítica, como pode ser observado nas Tabs. 6.6-6.8.

Assim, para que os resultados quantitativos sejam mais satisfatórios propomos aumentar o domínio na direção θ de forma que a recirculação introduzida pela condição de contorno de pressão constante ocorra para ângulos maiores que 90° .

Capítulo 7

Conclusão

O campo hidrodinâmico, ou seja, os perfis de velocidade logrados para os vários ângulos de θ (ângulo meridional), obtido para o escoamento do fluido com viscosidade variável pelo eletrodo semi-esférico rotatório se mostrou idêntico ao escoamento com fluido de viscosidade constante.

Os perfis de concentração obtidos para vários ângulos de θ para este problema foram semelhantes aos obtidos para o escoamento do fluido com viscosidade variável sobre o disco rotatório.

Observamos que apesar da igualdade nos perfis de velocidade, a equação do transporte de espécie química, acoplada às equações de quantidade de movimento e da continuidade, exerce influência nas derivadas de primeira e segunda ordem das funções F e G nas proximidades da semi-esfera, porém quando observadas as derivadas de H a influência é menor.

Apesar das equações terem sido deduzidas para o número de Reynolds alto (hipótese da camada limite), na simulação numérica através do método dos elementos finitos existem restrições aos valores máximos de Re para os quais se pode obter uma solução em regime permanente, seja por problemas de estabilidade hidrodinâmica do próprio escoamento e/ou por problemas de estabilidade numérica.

Os resultados mais satisfatórios foram obtidos com $Re = 40$, que é relativamente baixo para hipóteses de camada limite.

No entanto, a concordância dos resultados é suficientemente boa para ângulos θ de 45° , principalmente no caso da condição de contorno de Neumann para a velocidade. Para ângulos maiores o efeito da condição de contorno produz uma recirculação próximo a região de saída, afastando os resultados numéricos da solução analítica.

Desta forma, para a obtenção de resultados quantitativos mais satisfatórios, em termos numéricos, propomos aumentar o domínio na direção θ de tal forma que a recirculação introduzida pela condição de contorno de pressão constante ocorra para ângulos maiores que 90° .

Referências Bibliográficas

- [1] ANJOS, G. R. *Solução do Campo Hidrodinâmico em Células Eletroquímicas pelo Método dos Elementos Finitos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.
- [2] OLIVEIRA, G. C. P. *Estabilidade Hidrodinâmica em Células Eletroquímicas pelo Método de Elementos Finitos*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.
- [3] FERREIRA, D. V. A. *Estudo do campo hidrodinâmico entre dois discos rotatórios*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2012.
- [4] VON KÁRMÁN, T., ANGEW, Z. “Uber Laminare und Turbulente Reibung”, *ZAMM*, v. 1, pp. 233–252, 1921.
- [5] GODINEZ, J. G. S. *Eletrodo semi-esférico rotatório: teoria para o estado estacionário*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1996.
- [6] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1932.
- [7] BICKLEY, W. G. *Phil. Mag.*, v. 7, n. 25, pp. 746, 1938.
- [8] STOKES, G. G. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, , n. 8, pp. 287–305, 1845.
- [9] HOWARTH, L. *Phil. Mag.*, v. 7, n. 42, pp. 1308, 1951.
- [10] BARCIA, O., GODINEZ, J., LAMEGO, L. “Rotating Hemispherical Electrode: Accurate Expressions for the Limiting Current and the Convective Warburg Impedance”, *Journal of The Electrochemical Society*, v. 145, n. 12, pp. 4189–4195, December 1998.
- [11] HEATH, M. T. *Scientific Computing - An Introductory Survey*. 2 ed. Illinois, McGraw-Hill, 1997.

- [12] MANGIAVACCHI, N., PONTES, J., BARCIA, O. E. “Rotating-Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of the Transport of a Chemical Species”, *Physics of Fluids*, v. 19, pp. 114–119, 2007.
- [13] PONTES, J., MANGIAVACCHI, N., CONCEIÇÃO, A. R. “Rotating-Disk Flow Stability in Electrochemical Cells: Effect of Viscosity Stratification”, *Physics of Fluids*, v. 16, pp. 707–716, 2004.
- [14] BARCIA, O., MANGIAVACCHI, N., MATTOS, O. “Rotating Disk Flow in Electrochemical Cells: A Coupled Solution for Hydrodynamic and Mass Equations”, *Journal of The Electrochemical Society*, v. 155, n. 5, pp. 424–427, 2000.
- [15] DONEA, J., HUERTA, A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. England, John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [16] CUNHA, M. C. C. *Métodos Numéricos*. 2 ed. Campinas, Unicamp, 2000.
- [17] FOX, R. W., MCDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 5 ed. Rio de Janeiro, LTC, 2001.
- [18] BATCHELOR, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
- [19] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. 1 ed. New Jersey, Prentice-Hall, 1987.
- [20] GURTIN, M. E. *An Introduction to Continuum Mechanics*. 1 ed. New York, Academic Press, 1981.

Apêndice A

Sistemas de EDOs das séries de potências - Viscosidade constante

Neste capítulo apresentamos os sistemas de equações diferenciais ordinárias obtidos por Godinez[5] através do método de séries de potências de θ .

A.1 Simplificação das equações pela teoria da Camada Limite

Nesta seção simplificamos as equações completas da quantidade de movimento e da continuidade para um fluido com viscosidade constante em equações sob a hipótese de camada limite.

Esta simplificação será chamada de adimensionalização. Sendo assim, consideremos as seguintes variáveis adimensionais para o sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$v_{\theta}^* = \frac{v_{\theta}}{U}, \quad v_r^* = \frac{v_r}{V}, \quad v_{\phi}^* = \frac{v_{\phi}}{U}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2} \quad \text{e} \quad r^* = \frac{r}{\delta}.$$

Observação 1: Antes de iniciar a adimensionalização devemos trocar o r que não possui dependências por r_0 pois este é uma constante e até mesmo fora da camada limite, i.e., $r = r_0 + r'$, como $r' \ll r_0$ então $r \approx r_0$.

Observação 2: Consideramos o termo v_{ϕ} , porém como não há variação em relação a este termo não consideramos as derivadas em relação a v_{ϕ} .

Observação 3: Não há variação em relação a variável t -tempo, pois trata-se de um escoamento em regime estacionário.

A.1.1 Equação da Continuidade

Seja a Equação da Continuidade em coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0.$$

Pela Obs. 1, temos:

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r} (r_0^2 v_r) + \frac{1}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0.$$

Substituindo as variáveis adimensionais:

$$\frac{V}{\delta} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{U}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^* \sin \theta) = 0,$$

multiplicando a equação por δ/V , temos:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{\delta U}{V r_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta^* \sin \theta) = 0,$$

definindo $\delta U/V r_0 = 1$, logo:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \cot \theta v_\theta^* = 0. \quad (\text{A.1})$$

Através da Eq.(A.1) obtemos os termos que são preservados sob a hipótese da camada limite. Desta forma, a equação dimensional da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta = 0. \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Equação de Navier-Stokes na direção da componente θ

Seja a equação de Navier-Stokes na direção da componente θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\ \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\ \left. \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + g_\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Através das observações chegamos a seguinte equação:

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r_0} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r_0} = -\frac{1}{\rho r_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r_0^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r_0^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r_0^2 \sin^2 \theta} \right].$$

Ao substituir as variáveis adimensionais encontramos:

$$\frac{UV}{\delta} v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{U^2 v_\theta^*}{r_0} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{UV}{r_0} v_r^* v_\theta^* - \frac{U^2 v_\phi^{*2} \cot \theta}{r_0} = -\frac{\rho U^2}{\rho r_0} \frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \nu \left[\frac{U}{\delta^2 r_0^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r_0^2 \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} \right) + \frac{U}{r_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} \right) + \frac{2V}{r_0^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{U v_\theta^*}{r_0^2 \sin^2 \theta} \right].$$

Multiplicando ambos os lados da equação por δ/UV e considerando $\delta U/Vr_0 = 1$ da equação da continuidade, obtemos:

$$\begin{aligned} & \overbrace{v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*}}^I + \overbrace{v_\theta^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta}}^{II} + \overbrace{\frac{\delta}{r_0} v_r^* v_\theta^*}^{III} - \overbrace{\cot \theta v_\phi^{*2}}^{IV} = -\frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \\ & \underbrace{\frac{\nu}{V\delta} \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial r^{*2}}}_{VI} + \underbrace{\frac{\delta^2}{r_0^2} \frac{\nu}{V\delta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} \right)}_{VII} + \underbrace{2 \frac{V\delta^2}{U r_0^2} \frac{\nu}{V\delta} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta}}_{VIII} - \underbrace{\frac{\delta^2}{r_0^2} \frac{\nu}{V\delta} \frac{v_\theta^*}{r_0^2 \sin^2 \theta}}_{IX}. \end{aligned}$$

Os termos I, II, IV e V são de $\mathcal{O}(1)$, pois são constituídos apenas por variáveis adimensionais. O termo III pode ser descartado pois, por hipótese, $\delta/r_0 \ll 1$. Entre os termos viscosos, o termo VI é de maior ordem e, portanto, é considerado de ordem 1. Logo, $\nu/V\delta = \mathcal{O}(1)$, então $\delta/r_0 = \mathcal{O}(1/Re_\delta)$, onde $Re_\delta = U\delta/\nu$. Como, por hipótese, $\delta/r_0 \ll 1$ então os termos de ordem Re_δ^{-n} , com $n > 0$ podem ser descartados. Portanto, os termos VII e IX que são $\mathcal{O}(Re_\delta^{-2})$ e o termo $VIII$ que é de ordem Re_δ^{-3} são descartados.

Portanto, sob a hipótese da camada limite, a Eq.(A.3) simplificada é dada por:

$$v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + v_\theta^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - v_\phi^{*2} \cot \theta = -\frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial^2 v_\theta^*}{\partial r^{*2}}. \quad (A.4)$$

Avaliamos o gradiente de pressão fora da camada limite, desta forma obtemos a seguinte simplificação:

$$v_\theta^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - v_\phi^{*2} \cot \theta = -\frac{\partial p^*}{\partial \theta},$$

pois, não existe variação em r fora da camada limite. Temos também que: $v_\theta = 0$ e $v_\phi = 0$ fora da camada limite logo:

$$\frac{\partial p^*}{\partial \theta} = 0. \quad (A.5)$$

Portanto, através das Eqs.(A.4) e (A.5) obtemos os termos que são preservados sob a hipótese da camada limite. Desta forma, a equação dimensional de Navier-Stokes na componente θ tem a forma:

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r_0} v_\phi^2 = \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}. \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 Equação de Navier-Stokes na direção da componente ϕ

Seja a equação de Navier-Stokes na direção da componente ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r} \cot \theta = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \\ \nu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{v_\phi}{r^2 \sin \theta} + \right. \\ \left. \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + g_\phi. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Aplicando as observações obtemos:

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi v_r}{r_0} + \frac{v_\theta v_\phi}{r_0} \cot \theta = \nu \left[\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r_0^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. \frac{1}{r_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} \right) - \frac{v_\phi}{r_0^2 \sin \theta} \right]. \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis adimensionais temos:

$$\begin{aligned} \frac{UV}{\delta} v_r^* \frac{\partial v_\phi^*}{\partial r^*} + \frac{U^2 v_\theta^*}{r_0} \frac{\partial v_\phi^*}{\partial \theta} + \frac{UV}{r_0} v_\phi^* v_r^* + \frac{U^2}{r_0} \cot \theta v_\theta^* v_\phi^* = \nu \left[\frac{U}{\delta^2 r_0^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r_0^2 \frac{\partial v_\phi^*}{\partial r^*} \right) + \right. \\ \left. \frac{U}{r_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi^*}{\partial \theta} \right) - \frac{U}{r_0^2 \sin \theta} v_\phi^* \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por δ/UV e considerando $\delta U/VR_0 = 1$ da equação da continuidade, encontramos:

$$\begin{aligned} \overbrace{v_r^* \frac{\partial v_\phi^*}{\partial r^*}}^I + \overbrace{v_\theta^* \frac{\partial v_\phi^*}{\partial \theta}}^{II} + \overbrace{\frac{\delta}{r_0} v_\phi^* v_r^*}^{III} + \overbrace{\cot \theta v_\theta^* v_\phi^*}^{IV} = \\ \overbrace{\frac{\nu}{V \delta} \frac{\partial^2 v_\phi^*}{\partial r^{*2}}}^V + \overbrace{\frac{\delta^2}{r_0^2} \frac{\nu}{V \delta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_\phi^*}{\partial \theta} \right)}^{VI} - \overbrace{\frac{\delta^2}{r_0^2} \frac{\nu}{V \delta} \frac{1}{\sin \theta} v_\phi^*}^{VII}. \end{aligned}$$

Os termos I, II e IV são de $\mathcal{O}(1)$, pois são constituídos apenas por variáveis adimensionais. O termo III pode ser descartado pois, por hipótese, $\delta/r_0 \ll 1$.

Entre os termos viscosos, o termo V é de maior ordem e, portanto, é considerado de ordem 1. Logo, $\nu/V\delta = \mathcal{O}(1)$, então $\delta/r_0 = \mathcal{O}(1/Re_\delta)$, onde $Re_\delta = U\delta/\nu$. Como, por hipótese, $\delta/r_0 \ll 1$ então os termos de ordem Re_δ^{-2} podem ser descartados. Assim, os termos VI e VII são descartados.

Portanto, sob a hipótese da camada limite, a Eq.(A.7) simplificada é dada por:

$$v_r^* \frac{\partial v_\phi^*}{\partial r^*} + v_\theta^* \frac{\partial v_\phi^*}{\partial \theta} + \cot \theta v_\theta^* v_\phi^* = \nu \frac{\partial^2 v_\phi^*}{\partial r^{*2}}. \quad (\text{A.8})$$

Através da Eq.(A.8) obtemos os termos que são preservados sob a hipótese da camada limite. Desta forma, a equação dimensional da continuidade tem a forma:

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta v_\phi = \nu \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Metodologia

Em coordenadas esféricas, as equações da camada limite são dadas por:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r_0} v_\phi^2 = \nu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \quad (\text{A.11})$$

$$v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0} v_\theta v_\phi = \nu \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}, \quad (\text{A.12})$$

onde v_r , v_θ e v_ϕ são as componentes do vetor velocidade nas direções r , θ e ϕ , respectivamente; r_0 é o raio da semi-esfera e ν a viscosidade cinemática.

A Eq.(A.10) trata-se da *equação da continuidade* e as Eqs.(A.11) e (A.12) tratam-se das *equações da quantidade de movimento*.

As componentes da velocidade podem ser expressas como:

$$v_\theta = r_0 \bar{\Omega} F(\theta, \eta), \quad (\text{A.13})$$

$$v_\phi = r_0 \bar{\Omega} G(\theta, \eta), \quad (\text{A.14})$$

$$v_r = (\nu_\infty \bar{\Omega})^{1/2} H(\theta, \eta), \quad (\text{A.15})$$

onde $\bar{\Omega}$ é a velocidade angular.

Substituindo as componentes da velocidade dadas pelas Eqs. (A.13)-(A.15) no

conjunto de equações (A.10)-(A.12) obtemos as seguintes formas adimensionalizadas:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \nu^* \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{A.17})$$

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \nu^* \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = 0, \quad (\text{A.18})$$

onde η e ν^* são variáveis adimensionais definidas por: $\eta = (\bar{\Omega}/\nu_\infty)^{1/2} (r - r_0)$ e $\nu^* = \nu/\nu_\infty$, respectivamente.

O trabalho de Godinez[5] abordava um fluido com viscosidade constante. Assim, a variável ν^* é uma constante igual a 1. Portanto, o conjunto de Eqs. (A.16)-(A.18) toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} + \cot \theta F = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$H \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \frac{\partial F}{\partial \theta} - \cot \theta G^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \quad (\text{A.20})$$

$$H \frac{\partial G}{\partial \eta} + F \frac{\partial G}{\partial \theta} + \cot \theta FG = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}, \quad (\text{A.21})$$

As funções F , G e H e $\cot \theta$ expandidas em série de potências de θ são dadas, respectivamente, por:

$$F(\theta, \eta) = \theta F_1(\eta) + \theta^3 F_3(\eta) + \theta^5 F_5(\eta) + \theta^7 F_7(\eta) + \dots \quad (\text{A.22})$$

$$G(\theta, \eta) = \theta G_1(\eta) + \theta^3 G_3(\eta) + \theta^5 G_5(\eta) + \theta^7 G_7(\eta) + \dots \quad (\text{A.23})$$

$$H(\theta, \eta) = H_1(\eta) + \theta^2 H_3(\eta) + \theta^4 H_5(\eta) + \theta^6 H_7(\eta) + \dots \quad (\text{A.24})$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{45} - \frac{2\theta^5}{945} - \frac{\theta^7}{4725} - \frac{2\theta^9}{93555} - \frac{1382\theta^{11}}{638512875} - \dots \quad (\text{A.25})$$

Substituindo as séries (A.22)-(A.25) limitadas até o décimo termo de cada e igualando as mesmas potências de θ obtemos os sistemas de equações diferenciais acopladas exibidos na Seção A.3 a Seção A.12.

A.3 Primeiro sistema (θ^0 e θ^1)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^0 e θ^1 é dado por:

$$\begin{aligned} H'_1 + 2F_1 &= 0 \\ F''_1 - H_1 F'_1 - F_1^2 + G_1^2 &= 0 \\ G''_1 - H_1 G'_1 - 2F_1 G_1 &= 0. \end{aligned}$$

A.4 Segundo sistema (θ^2 e θ^3)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^2 e θ^3 é dado por:

$$\begin{aligned} H_3' + 4F_3 &= \frac{F_1}{3} \\ F_3'' - H_1F_3' - H_3F_1' - 4F_1F_3 + 2G_1G_3 &= \frac{G_1^2}{3} \\ G_3'' - H_1G_3' - H_3G_1' - 4F_1G_3 - 2F_3G_1 &= -\frac{F_1G_1}{3}. \end{aligned}$$

A.5 Terceiro sistema (θ^4 e θ^5)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^4 e θ^5 é dado por:

$$\begin{aligned} H_5' + 6F_5 &= \frac{F_1}{45} + \frac{F_3}{3} \\ F_5'' - H_1F_5' - H_5F_1' - 6F_1F_5 + 2G_1G_5 &= H_3F_3' + 3F_3^2 - G_3^2 + \frac{G_1^2}{45} + \frac{2G_1G_3}{3} \\ G_5'' - H_1G_5' - H_5G_1' - 6F_1G_5 - 2F_5G_1 &= H_3G_3' + 4F_3G_3 - \frac{F_1G_3}{3} - \frac{F_3G_1}{3} - \frac{F_1G_1}{45}. \end{aligned}$$

A.6 Quarto sistema (θ^6 e θ^7)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^6 e θ^7 é dado por:

$$\begin{aligned} H_7' + 8F_7 &= \frac{F_5}{3} + \frac{F_3}{45} + \frac{2F_1}{945} \\ F_7'' - H_1F_7' - 8F_1F_7 + 2G_1G_7 - H_7F_1' &= H_3F_5' + H_5F_3' + 8F_3F_5 - \\ & 2G_3G_5 + \frac{2G_1G_5}{3} + \frac{G_3^2}{3} + \frac{2G_1G_3}{45} + \frac{2G_1^2}{945} \\ G_7'' - H_1G_7' - H_7G_1' - 8F_1G_7 - 2F_7G_1 &= H_3G_5' + H_5G_3' + 6F_3G_5 + 4F_5G_3 - \\ & \frac{F_3G_3}{3} - \frac{F_1G_5}{3} - \frac{F_5G_1}{3} - \frac{F_1G_3}{45} - \frac{F_3G_1}{45} - \frac{2F_1G_1}{945}. \end{aligned}$$

A.7 Quinto sistema (θ^8 e θ^9)

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^8 e θ^9 é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_9 + 10F_9 &= \frac{F_1}{4725} + \frac{2F_3}{945} + \frac{F_5}{45} + \frac{F_7}{3} \\
F''_9 - H_1F'_9 - H_9F'_1 - 10F_1F_9 + 2G_1G_9 &= H_3F'_7 + H_5F'_5 + H_7F'_3 + 10F_3F_7 + 5F_5^2 - \\
&\quad 2G_3G_7 - G_5^2 + \frac{2G_1G_7}{3} + \frac{2G_3G_5}{3} + \frac{2G_1G_5}{45} + \frac{G_3^2}{45} + \frac{4G_1G_3}{945} + \frac{G_1^2}{4725} \\
G''_9 - H_1G'_9 - H_9G'_1 - 10F_1G_9 - 2F_9G_1 &= H_3G'_7 + H_5G'_5 + H_7G'_3 + 8F_3G_7 + \\
&\quad 6F_5G_5 + 4F_7G_3 - \frac{F_1G_7}{3} - \frac{F_3G_5}{3} - \frac{F_5G_3}{3} - \frac{F_7G_1}{3} - \frac{F_1G_5}{45} - \frac{F_3G_3}{45} - \frac{F_5G_1}{45} - \\
&\quad \frac{2F_1G_3}{945} - \frac{2F_3G_1}{945} - \frac{F_1G_1}{4725}.
\end{aligned}$$

A.8 Sexto sistema (θ^{10} e θ^{11})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{10} e θ^{11} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{11} + 12F_{11} &= \frac{2F_1}{93555} + \frac{F_3}{4725} + \frac{2F_5}{945} + \frac{F_7}{45} + \frac{F_9}{3} \\
F''_{11} - H_1F'_{11} - H_{11}F'_1 - 12F_1F_{11} + 2G_1G_{11} &= H_3F'_9 + H_5F'_7 + H_7F'_5 + H_9F'_3 + \\
&\quad 12F_3F_9 + 12F_5F_7 - 2G_3G_9 - 2G_5G_7 + \frac{2G_1G_9}{3} + \frac{2G_3G_7}{3} + \frac{G_5^2}{3} + \frac{2G_1G_7}{45} + \\
&\quad \frac{2G_3G_5}{45} + \frac{4G_1G_5}{945} + \frac{2G_3^2}{945} + \frac{2G_1G_3}{4725} + \frac{2G_1^2}{93555} \\
G''_{11} - H_1G'_{11} - H_{11}G'_1 - 12F_1G_{11} - 2F_{11}G_1 &= H_3G'_9 + H_5G'_7 + H_7G'_5 + H_9G'_3 + \\
&\quad 4F_9G_3 + 6F_7G_5 + 8F_5G_7 + 10F_3G_9 - \frac{F_1G_9}{3} - \frac{F_3G_7}{3} - \frac{F_5G_5}{3} - \frac{F_7G_3}{3} - \\
&\quad \frac{F_9G_1}{3} - \frac{F_1G_7}{45} - \frac{F_3G_5}{45} - \frac{F_5G_3}{45} - \frac{F_7G_1}{45} - \frac{2F_1G_5}{945} - \frac{2F_3G_3}{945} - \frac{2F_5G_1}{945} - \\
&\quad \frac{F_1G_3}{4725} - \frac{F_3G_1}{4725} - \frac{2F_1G_1}{93555}.
\end{aligned}$$

A.9 Sétimo sistema (θ^{12} e θ^{13})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{12} e θ^{13} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{13} + 14F_{13} &= \frac{1382F_1}{638512875} + \frac{2F_3}{93555} + \frac{F_5}{4725} + \frac{2F_7}{945} + \frac{F_9}{45} + \frac{F_{11}}{3} \\
F''_{13} - H_1F'_{13} - H_{13}F'_1 - 14F_1F_{13} + 2G_1G_{13} &= H_3F'_{11} + H_5F'_9 + H_7F'_7 + H_9F'_5 + \\
&\quad H_{11}F'_3 + 14F_3F_{11} + 14F_5F_9 + 7F_7^2 - 2G_3G_{11} - 2G_5G_9 - G_7^2 + \frac{2G_1G_{11}}{3} + \\
&\quad \frac{2G_3G_9}{3} + \frac{2G_5G_7}{3} + \frac{2G_1G_9}{45} + \frac{2G_3G_7}{45} + \frac{G_5^2}{45} + \frac{4G_1G_7}{945} + \frac{4G_3G_5}{945} + \frac{2G_1G_5}{4725} + \frac{G_3^2}{4725} + \\
&\quad \frac{4G_1G_3}{93555} + \frac{1382G_1^2}{638512875} \\
G''_{13} - H_1G'_{13} - H_{13}G'_1 - 14F_1G_{13} - 2F_{13}G_1 &= H_3G'_{11} + H_5G'_9 + H_7G'_7 + H_9G'_5 + \\
&\quad H_{11}G'_3 + 12F_3G_{11} + 10F_5G_9 + 8F_7G_7 + 6F_9G_5 + 4F_{11}G_3 - \frac{F_1G_{11}}{3} - \frac{F_3G_9}{3} - \\
&\quad \frac{F_5G_7}{3} - \frac{F_7G_5}{3} - \frac{F_9G_3}{3} - \frac{F_{11}G_1}{3} - \frac{F_1G_9}{45} - \frac{F_3G_7}{45} - \frac{F_5G_5}{45} - \frac{F_7G_3}{45} - \frac{F_9G_1}{45} - \\
&\quad \frac{2F_1G_7}{945} - \frac{2F_3G_5}{945} - \frac{2F_5G_3}{945} - \frac{2F_7G_1}{945} - \frac{F_1G_5}{4725} - \frac{F_3G_3}{4725} - \frac{F_5G_1}{4725} - \frac{2F_1G_3}{93555} - \\
&\quad \frac{2F_3G_1}{93555} - \frac{1382F_1G_1}{638512875}.
\end{aligned}$$

A.10 Oitavo sistema (θ^{14} e θ^{15})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{14} e θ^{15} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{15} + 16F_{15} &= \frac{4F_1}{18243225} + \frac{1382F_3}{638512875} + \frac{2F_5}{93555} + \frac{F_7}{4725} + \frac{2F_9}{945} + \frac{F_{11}}{45} + \frac{F_{13}}{3} \\
F''_{15} - H_1F'_{15} - H_{15}F'_1 - 16F_1F_{15} + 2G_1G_{15} &= H_3F'_{13} + H_5F'_{11} + H_7F'_9 + H_9F'_7 + \\
&\quad H_{11}F'_5 + H_{13}F'_3 + 16F_3F_{13} + 16F_5F_{11} + 16F_7F_9 - 2G_3G_{13} - 2G_5G_{11} - 2G_7G_9 + \\
&\quad \frac{2G_1G_{13}}{3} + \frac{2G_3G_{11}}{3} + \frac{2G_5G_9}{3} + \frac{G_7^2}{3} + \frac{2G_1G_{11}}{45} + \frac{2G_3G_9}{45} + \frac{2G_5G_7}{45} + \frac{4G_1G_9}{945} + \\
&\quad \frac{4G_3G_7}{945} + \frac{2G_5^2}{945} + \frac{2G_1G_7}{4725} + \frac{2G_3G_5}{4725} + \frac{4G_1G_5}{93555} + \frac{2G_3^2}{93555} + \frac{2764G_1G_3}{638512875} + \frac{4G_1^2}{18243225} \\
G''_{15} - H_1G'_{15} - H_{15}G'_1 - 16F_1G_{15} - 2F_{15}G_1 &= H_3G'_{13} + H_5G'_{11} + H_7G'_9 + H_9G'_7 + \\
&\quad H_{11}G'_5 + H_{13}G'_3 + 14F_3G_{13} + 12F_5G_{11} + 10F_7G_9 + 8F_9G_7 + 6F_{11}G_5 + 4F_{13}G_3 - \\
&\quad \frac{F_1G_{13}}{3} - \frac{F_3G_{11}}{3} - \frac{F_5G_9}{3} - \frac{F_7G_7}{3} - \frac{F_9G_5}{3} - \frac{F_{11}G_3}{3} - \frac{F_{13}G_1}{3} - \frac{F_1G_{11}}{45} - \frac{F_3G_9}{45} - \\
&\quad \frac{F_5G_7}{45} - \frac{F_7G_5}{45} - \frac{F_9G_3}{45} - \frac{F_{11}G_1}{45} - \frac{2F_1G_9}{945} - \frac{2F_3G_7}{945} - \frac{2F_5G_5}{945} - \frac{2F_7G_3}{945} - \\
&\quad \frac{2F_9G_1}{945} - \frac{F_1G_7}{4725} - \frac{F_3G_5}{4725} - \frac{F_5G_3}{4725} - \frac{F_7G_1}{4725} - \frac{2F_1G_5}{93555} - \frac{2F_3G_3}{93555} - \frac{2F_5G_1}{93555} - \\
&\quad \frac{1382F_1G_3}{638512875} - \frac{1382F_3G_1}{638512875} - \frac{4F_1G_1}{18243225}.
\end{aligned}$$

A.11 Nono sistema (θ^{16} e θ^{17})

O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{16} e θ^{17} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{17} + 18F_{17} &= \frac{3671F_1}{162820783125} + \frac{4F_3}{18243225} + \frac{1382F_5}{638512875} + \frac{2F_7}{93555} + \frac{F_9}{4725} + \frac{2F_{11}}{945} + \\
&\quad \frac{F_{13}}{45} + \frac{F_{15}}{3} \\
F''_{17} - H_1F'_{17} - H_{17}F'_1 - 18F_1F_{17} + 2G_1G_{17} &= H_3F'_{15} + H_5F'_{13} + H_7F'_{11} + H_9F'_9 + \\
&\quad H_{11}F'_7 + H_{13}F'_5 + H_{15}F'_3 + 18F_3F_{15} + 18F_5F_{13} + 18F_7F_{11} + 9F_9^2 - 2G_3G_{15} - \\
&\quad 2G_5G_{13} - 2G_7G_{11} - G_9^2 + \frac{2G_1G_{15}}{3} + \frac{2G_3G_{13}}{3} + \frac{2G_5G_{11}}{3} + \frac{2G_7G_9}{3} + \frac{2G_1G_{13}}{45} + \\
&\quad \frac{2G_3G_{11}}{45} + \frac{2G_5G_9}{45} + \frac{G_7^2}{45} + \frac{4G_1G_{11}}{945} + \frac{4G_3G_9}{945} + \frac{4G_5G_7}{945} + \frac{2G_1G_9}{4725} + \frac{2G_3G_7}{4725} + \\
&\quad \frac{G_5^2}{4725} + \frac{4G_1G_7}{93555} + \frac{4G_3G_5}{93555} + \frac{2764G_1G_5}{638512875} + \frac{1382G_3^2}{638512875} + \frac{8G_1G_3}{18243225} + \\
&\quad \frac{3617G_1^2}{162820783125} \\
G''_{17} - H_1G'_{17} - H_{17}G'_1 - 18F_1G_{17} - 2F_{17}G_1 &= H_3G'_{15} + H_5G'_{13} + H_7G'_{11} + H_9G'_9 + \\
&\quad H_{11}G'_7 + H_{13}G'_5 + H_{15}G'_3 + 16F_3G_{15} + 14F_5G_{13} + 12F_7G_{11} + 10F_9G_9 + \\
&\quad 8F_{11}G_7 + 6F_{13}G_5 + 4F_{15}G_3 - \frac{F_1G_{15}}{3} - \frac{F_3G_{13}}{3} - \frac{F_5G_{11}}{3} - \frac{F_7G_9}{3} - \frac{F_9G_7}{3} - \\
&\quad \frac{F_{11}G_5}{3} - \frac{F_{13}G_3}{3} - \frac{F_{15}G_1}{3} - \frac{F_1G_{13}}{45} - \frac{F_3G_{11}}{45} - \frac{F_5G_9}{45} - \frac{F_7G_7}{45} - \frac{F_9G_5}{45} - \\
&\quad \frac{F_{11}G_3}{45} - \frac{F_{13}G_1}{45} - \frac{2F_1G_{11}}{945} - \frac{2F_3G_9}{945} - \frac{2F_5G_7}{945} - \frac{2F_7G_5}{945} - \frac{2F_9G_3}{945} - \frac{2F_{11}G_1}{945} - \\
&\quad \frac{F_1G_9}{4725} - \frac{F_3G_7}{4725} - \frac{F_5G_5}{4725} - \frac{F_7G_3}{4725} - \frac{F_9G_1}{4725} - \frac{2F_1G_7}{93555} - \frac{2F_3G_5}{93555} - \frac{2F_5G_3}{93555} - \\
&\quad \frac{2F_7G_1}{93555} - \frac{1382F_1G_5}{638512875} - \frac{1382F_3G_3}{638512875} - \frac{1382F_5G_1}{638512875} - \frac{4F_1G_3}{18243225} - \frac{4F_3G_1}{18243225} - \\
&\quad \frac{3617F_1G_1}{162820783125}.
\end{aligned}$$

A.12 Décimo sistema (θ^{18} e θ^{19})

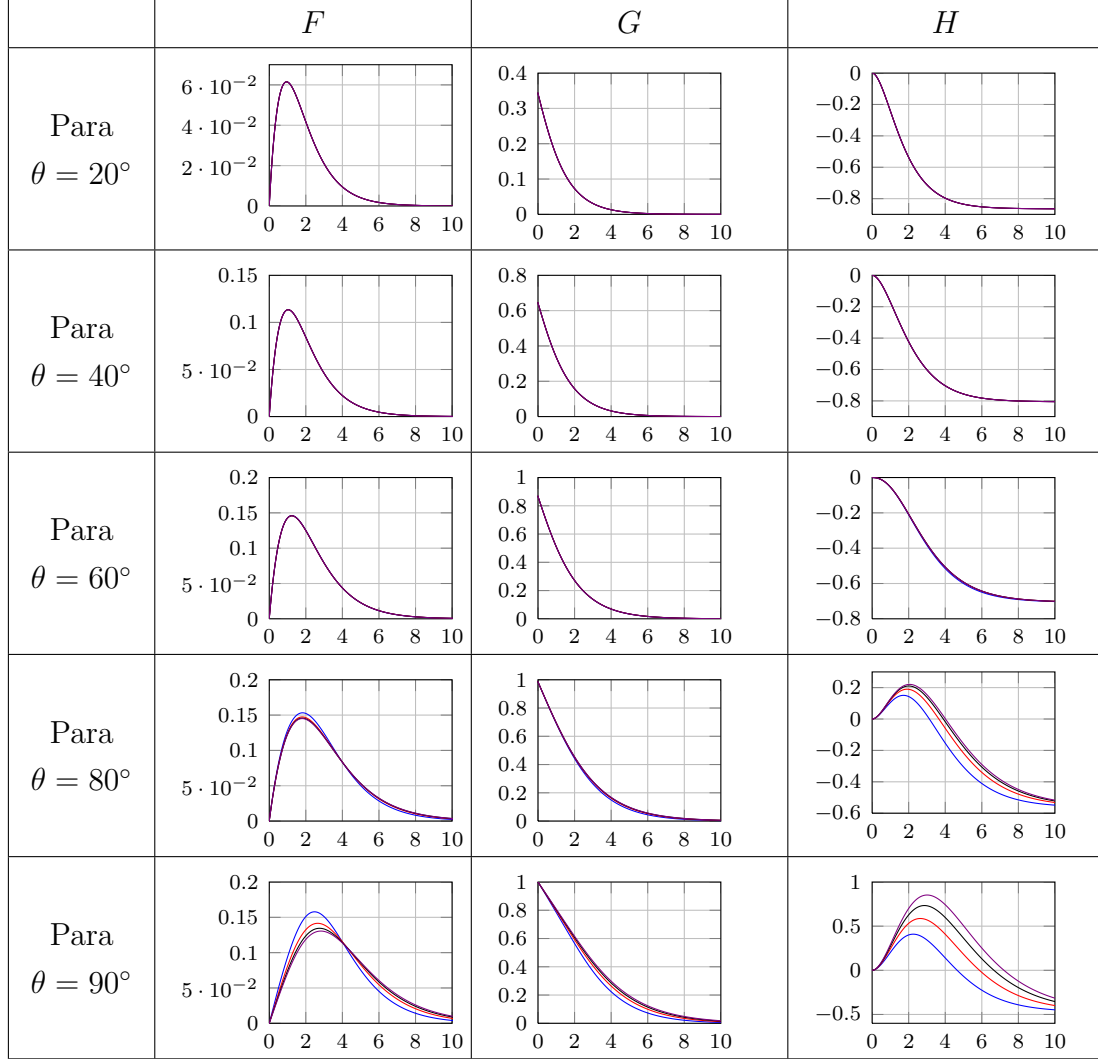
O sistema de equações diferenciais para as potências de θ^{18} e θ^{19} é dado por:

$$\begin{aligned}
H'_{19} + 20F_{19} &= \frac{87734F_1}{38979295480125} + \frac{3617F_3}{162820783125} + \frac{4F_5}{18243225} + \frac{1382F_7}{638512875} + \\
&\quad \frac{2F_9}{93555} + \frac{F_{11}}{4725} + \frac{2F_{13}}{945} + \frac{F_{15}}{45} + \frac{F_{17}}{3} \\
F''_{19} - H_1F'_{19} - H_{19}F'_1 - 20F_1F_{19} + 2G_1G_{19} &= H_3F'_{17} + H_5F'_{15} + H_7F'_{13} + H_9F'_{11} + \\
&\quad H_{11}F'_9 + H_{13}F'_7 + H_{15}F'_5 + H_{17}F'_3 + 20F_3F_{17} + 20F_5F_{15} + 20F_7F_{13} + 20F_9F_{11} - \\
&\quad 2G_3G_{17} - 2G_5G_{15} - 2G_7G_{13} - 2G_9G_{11} + \frac{2G_1G_{17}}{3} + \frac{2G_3G_{15}}{3} + \frac{2G_5G_{13}}{3} + \\
&\quad \frac{2G_7G_{11}}{3} + \frac{G_9^2}{3} + \frac{2G_1G_{15}}{45} + \frac{2G_3G_{13}}{45} + \frac{2G_5G_{11}}{45} + \frac{2G_7G_9}{45} + \frac{4G_1G_{13}}{945} + \frac{4G_3G_{11}}{945} + \\
&\quad \frac{4G_5G_9}{945} + \frac{2G_7^2}{945} + \frac{2G_1G_{11}}{4725} + \frac{2G_3G_9}{4725} + \frac{2G_5G_7}{4725} + \frac{4G_1G_9}{93555} + \frac{4G_3G_7}{93555} + \frac{2G_5^2}{93555} + \\
&\quad \frac{2764G_1G_7}{638512875} + \frac{2764G_5G_3}{638512875} + \frac{8G_1G_5}{18243225} + \frac{4G_3^2}{18243225} + \frac{7234G_1G_3}{162820783125} + \\
&\quad \frac{87734G_1^2}{38979295480125} \\
G''_{19} - H_1G'_{19} - H_{19}G'_1 - 20F_1G_{19} - 2F_{19}G_1 &= H_3G'_{17} + H_5G'_{15} + H_7G'_{13} + H_9G'_{11} + \\
&\quad H_{11}G'_9 + H_{13}G'_7 + H_{15}G'_5 + H_{17}G'_3 + 18F_3G_{17} + 16F_5G_{15} + 14F_7G_{13} + 12F_9G_{11} + \\
&\quad 10F_{11}G_9 + 8F_{13}G_7 + 6F_{15}G_5 + 4F_{17}G_3 - \frac{F_1G_{17}}{3} - \frac{F_3G_{15}}{3} - \frac{F_5G_{13}}{3} - \frac{F_7G_{11}}{3} - \\
&\quad \frac{F_9G_9}{3} - \frac{F_{11}G_7}{3} - \frac{F_{13}G_5}{3} - \frac{F_{15}G_3}{3} - \frac{F_{17}G_1}{3} - \frac{F_1G_{15}}{45} - \frac{F_3G_{13}}{45} - \frac{F_5G_{11}}{45} - \\
&\quad \frac{F_7G_9}{45} - \frac{F_9G_7}{45} - \frac{F_{11}G_5}{45} - \frac{F_{13}G_3}{45} - \frac{F_{15}G_1}{45} - \frac{2F_1G_{13}}{945} - \frac{2F_3G_{11}}{945} - \frac{2F_5G_9}{945} - \\
&\quad \frac{2F_7G_7}{945} - \frac{2F_9G_5}{945} - \frac{2F_{11}G_3}{945} - \frac{2F_{13}G_1}{945} - \frac{F_1G_{11}}{4725} - \frac{F_3G_9}{4725} - \frac{F_5G_7}{4725} - \frac{F_7G_5}{4725} - \\
&\quad \frac{F_9G_3}{4725} - \frac{F_{11}G_1}{4725} - \frac{2F_1G_9}{93555} - \frac{2F_3G_7}{93555} - \frac{2F_5G_5}{93555} - \frac{2F_7G_3}{93555} - \frac{2F_9G_1}{93555} - \frac{1382F_1G_7}{638512875} - \\
&\quad \frac{1382F_3G_5}{638512875} - \frac{1382F_5G_3}{638512875} - \frac{1382F_7G_1}{638512875} - \frac{4F_1G_5}{18243225} - \frac{4F_3G_3}{18243225} - \frac{4F_5G_1}{18243225} - \\
&\quad \frac{3617F_1G_3}{162820783125} - \frac{3617F_3G_1}{162820783125} - \frac{87734F_1G_1}{38979295480125}.
\end{aligned}$$

A.13 Resultados

As soluções numéricas dos sistemas apresentados nas Seções A.3 a A.12 obtidas por Godínez[5] foram reproduzidas através de um código numérico em MATLAB e são exibidas na Tab. A.1.

Tabela A.1: Resultados dos sistemas de equações diferenciais com viscosidade constante, com legenda: — 4 termos, — 6 termos, — 8 termos, — 10 termos.



Apêndice B

Código em MATLAB

Neste capítulo apresentamos o código de uma função (construída em MATLAB) para resolução do sistema de EDOs dado na Sec. 5.2 do Cap. 5, a resolução dos outros nove sistemas se dá de forma análoga. Os resultados exibidos na Sec. 5.13 do mesmo capítulo são dados por um *script* que soma os resultados das funções realizadas no MATLAB.

```
1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 %      Solução do sistema de equações diferenciais lineares      %
3 %                                                                 %
4 %      Esta função tem por objetivo solucionar o sistema de EDOs %
5 %      acoplado (Eqs. da continuidade, do movimento e transporte de %
6 %      espécie química). %
7 %                                                                 %
8 %      Autores: Rachel Lucena %
9 %      José Pontes %
10 %                                                                 %
11 % Data: 18 de julho de 2012. %
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 function ViscosidadeVSistema1(L,nptos,itemax,epsilon,p,Sc)
14 tic
15 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Dados de entrada %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
16 %%% L eh o comprimento da malha.
17 %%% Recomendado: L=20;
18
19 %%% nptos eh o numero de pontos da malha.
20 %%% Recomendado: nptos=800;
21
22 %%% itemax eh numero maximo de iteracoes da aplicação da correção.
23 %%% Recomendado: itemax=1000;
24
25 %%% epsilon eh o valor do erro.
26 %%% Recomendado: epsilon=10^(-8);
27
28 %%% p eh o valor da porcentagem da correção.
29 %%% Recomendado: p=0.1;
30
31 %%% Sc número de Schimdt
32 %%% Sc recomendado Sc=2000
```

```

33
34     %%% cont eh o uso dos dados de uma simulação anterior
35     %%% Se cont==0 utiliza c.i. do programa, se não utiliza da simulação
36     %%% anterior.
37     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculo de algumas constantes %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
38     dx = L/(nptos-2); %%% Variação entre cada ponto
39     d1=1/(2*dx); %%% Constante1 que multiplica as derivadas
40     d2=1/(dx*dx); %%% Constante2 que multiplica as derivadas
41     m=0.81315; %%% Constante de Nu
42     x=-dx/2:dx:L+dx/2; %%% Intervalo dos pontos para plotagem dos perfis
43
44     %%%%%%%%%% Construção dos vetores: F1,G1,H1,r,X e da matriz A %%%%%%%%%%
45     global F1 G1 H1 C1 D1F1 D1G1 D1H1 D1C1 D2F1 D2G1 D2H1 D2C1
46
47     F1=zeros(nptos,1); %%%
48     G1=zeros(nptos,1); %%% Construção dos vetores F1,G1,H1,C1
49     H1=zeros(nptos,1); %%%
50     C1=zeros(nptos,1); %%%
51     Nul=zeros(nptos,1);
52     dNul=zeros(nptos,1);
53
54     b=zeros(4*nptos,1); %%% Construção do vetor b
55     r=zeros(4*nptos,1); %%% Construção do vetor r
56     A=zeros(4*nptos,4*nptos); %%% Construção da matriz A
57     X=zeros(4*nptos,1); %%% Construção do vetor X
58
59     D1F1=zeros(nptos,1); %%% Construção dos vetores das
60     D1G1=zeros(nptos,1); %%% derivadas de primeira ordem
61     D1H1=zeros(nptos,1); %%% F1, G1, H1, C1
62     D1C1=zeros(nptos,1); %%%
63
64     D2F1=zeros(nptos,1); %%% Construção dos vetores das
65     D2G1=zeros(nptos,1); %%% derivadas de segunda ordem
66     D2H1=zeros(nptos,1); %%% F1, G1, H1, C1
67     D2C1=zeros(nptos,1); %%%
68     %%%%%%%%%% Condições iniciais das funções F1, G1, H1 e C1 %%%%%%%%%%
69     %% C.I. de F1,G1,H1 utilizando o resultado da Viscosidade Constante %%
70     funcaoV1=load('DadosSistemat.mat');
71     %F1=funcaoV1.F1; G1=funcaoV1.G1; H1=funcaoV1.H1;
72     if (size(funcaoV1.F1,1)==nptos)
73         F1=funcaoV1.F1(1:nptos,:);
74         G1=funcaoV1.G1(1:nptos,:);
75         H1=funcaoV1.H1(1:nptos,:);
76     else
77         nptosOld=size(funcaoV1.F1,1);
78         XX=(((1:nptos)-1)*(nptosOld-1)/(nptos-1)+1)';
79         F1=interp1(funcaoV1.F1,XX);
80         G1=interp1(funcaoV1.G1,XX);
81         H1=interp1(funcaoV1.H1,XX);
82     end
83     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Condições iniciais de C1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
84     C1(1,1)=1+dx/2;
85     C1(2,1)=1-dx/2;
86     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Condições de contorno do resíduo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
87     r(1,1)=0; r(2,1)=0; r(3,1)=0; r(4,1)=0;
88     r(4*nptos-3,1)=0; r(4*nptos-2,1)=0; r(4*nptos-1,1)=0; r(4*nptos,1)=0;
89     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Condições de contorno da matriz A %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
90     A(1,1)=1; A(1,5)=1;
91     A(2,2)=1; A(2,6)=1;

```

```

92     A(3,3)=1;          A(3,7)=1;
93     A(4,4)=1;          A(4,8)=1;
94 %
95     A(4*nptos-3,4*nptos-7)=1;      A(4*nptos-3,4*nptos-3)=1;
96     A(4*nptos-2,4*nptos-6)=1;      A(4*nptos-2,4*nptos-2)=1;
97     A(4*nptos-1,4*nptos-5)=-1;     A(4*nptos-1,4*nptos-1)=1;
98     A(4*nptos,4*nptos-4)=1;        A(4*nptos,4*nptos)=1;
99 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Cálculo de b %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
100     j=2;
101     for i=5:4:4*nptos-7
102         b(i,1)= 0;%10^(-0);
103         b(i+1,1)= 0;%10^(-0);
104         b(i+2,1)= 0;%10^(-0);
105         b(i+3,1)= 0;
106         j=j+1;
107     end
108 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Início das iterações %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
109     for k=1:itemax
110         %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Cálculo do Resíduo %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
111         for i=2:(nptos-1)
112             qi=4*i;
113             Nu1(i,1)=exp(m*C1(i,1));
114             dNu1(i,1)=m*Nu1(i,1)*d1*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1));
115             %
116             r(qi-3,1)=d1*(-H1(i-1,1)+H1(i+1,1))+2*F1(i,1);
117             %
118             r(qi-2,1)=d1*dNu1(i,1)*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1))...
119                 +d2*Nu1(i,1)*(F1(i-1,1)-2*F1(i,1)+F1(i+1,1))...
120                 -d1*H1(i,1)*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1))-F1(i,1)^2 + G1(i,1)^2;
121             %
122             r(qi-1,1)=F1(i,1)*C1(i,1)+d1*dNu1(i,1)*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1))...
123                 +d2*Nu1(i,1)*(G1(i-1,1)-2*G1(i,1)+G1(i+1,1))...
124                 -d1*H1(i,1)*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1))-2*F1(i,1)*G1(i,1);
125             %
126             r(qi,1)=1/Nu1(i,1)*d2*(C1(i-1,1)-2*C1(i,1)+C1(i+1,1))...
127                 -d1^2*m/Nu1(i,1)*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1))^2 ...
128                 -Sc*d1*H1(i,1)*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1));
129         end
130 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculando as entradas da Matriz A %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
131         for i=2:nptos-1
132             qi=4*i;
133             qj2=4*(i-2);
134             Nu1(i,1)=exp(m*C1(i,1));
135             dNu1(i,1)=m*Nu1(i,1)*d1*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1));
136             %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Primeira Equação %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
137             A(qi-3,qj2+3)=-d1;
138             A(qi-3,qj2+5)=2;
139             A(qi-3,qj2+11)=d1;
140             %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Segunda Equação %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
141             A(qi-2,qj2+1)=d2*Nu1(i,1)-d1*dNu1(i,1)+d1*H1(i,1);
142             A(qi-2,qj2+4)=-m*Nu1(i,1)*d1^2*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1));
143             A(qi-2,qj2+5)=-2*d2*Nu1(i,1)-2*F1(i,1);
144             A(qi-2,qj2+6)=2*G1(i,1);
145             A(qi-2,qj2+7)=-d1*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1));
146             A(qi-2,qj2+8)=m*dNu1(i,1)*d1*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1))...
147                 +m*Nu1(i,1)*d2*(F1(i-1,1)-2*F1(i,1)+F1(i+1,1));
148             A(qi-2,qj2+9)=d1*dNu1(i,1)+d2*Nu1(i,1)-d1*H1(i,1);
149             A(qi-2,qj2+12)=d1^2*m*Nu1(i,1)*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1));
150             %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Terceira Equação %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

151     A(qi-1,qj2+2)=-d1*dNu1(i,1)+d2*Nu1(i,1)+d1*H1(i,1);
152     A(qi-1,qj2+4)=-m*Nu1(i,1)*d1^2*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1));
153     A(qi-1,qj2+5)=-2*G1(i,1);
154     A(qi-1,qj2+6)=-2*d2*Nu1(i,1)-2*F1(i,1);
155     A(qi-1,qj2+7)=-d1*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1));
156     A(qi-1,qj2+8)=m*dNu1(i,1)*d1*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1)) ...
157         +d2*m*Nu1(i,1)*(G1(i-1,1)-2*G1(i,1)+G1(i+1,1));
158     A(qi-1,qj2+10)=d1*dNu1(i,1)+d2*Nu1(i,1)-d1*H1(i,1);
159     A(qi-1,qj2+12)=m*d1^2*Nu1(i,1)*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1));
160     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Quarta Equação %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
161     A(qi,qj2+4)=d2/Nu1(i,1)+2*m*d1^2/Nu1(i,1)*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1)) ...
162         +Sc*d1*H1(i,1);
163     %A(qi,qj2+5)=-Sc*C1(i,1);
164     A(qi,qj2+7)=-Sc*d1*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1));
165     A(qi,qj2+8)=-m/Nu1(i,1)*d2*(C1(i-1,1)-2*C1(i,1)+C1(i+1,1)) ...
166         -2*d2/Nu1(i,1)+m^2/Nu1(i,1)*d1^2*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1))^2;
167     A(qi,qj2+12)=d2/Nu1(i,1)-2*m*d1^2/Nu1(i,1)*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1)) ...
168         -Sc*d1*H1(i,1);
169 end
170 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Resolvendo o sistema AX=b %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
171 X=A\b-r;
172 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Cálculo da Correção %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
173 for i=1:nptos
174     qi1=4*(i-1);
175     F1(i,1)=F1(i,1)+p*X(qi1+1,1);
176     G1(i,1)=G1(i,1)+p*X(qi1+2,1);
177     H1(i,1)=H1(i,1)+p*X(qi1+3,1);
178     C1(i,1)=C1(i,1)+p*X(qi1+4,1);
179 end
180 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Verificando se o resíduo é maior que Epsilon %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
181 q=0;
182 for kk=5:4*nptos-4
183     if abs(b(kk,1)-r(kk,1))>epsilon
184         q=1;
185         break
186     end
187 end
188 if q==0
189     break
190 end
191 end
192 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Plotando os perfis F1, G1, H1 e C1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
193 figure
194     hold on
195     plot(x,F1,'r')
196     plot(x,G1,'b')
197     plot(x,-H1,'m')
198     plot(x,C1,'k')
199     grid
200     title('Resultado parcial de F1, G1, -H1 e C1')
201     xlabel('Comprimento da malha')
202     ylabel('F1, G1, -H1, C1')
203     legend('F1','G1','-H1','C1')
204     hold off
205 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Pós-processamento %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
206 %%%%%%%%% Cálculo das derivadas de primeira ordem: D1F1, D1G1, D1H1 e D1C1 %%%%%%%%%
207     D1F1(1,1)=d1*(-3*F1(1,1)+4*F1(2,1)-F1(3,1));
208     D1G1(1,1)=d1*(-3*G1(1,1)+4*G1(2,1)-G1(3,1));
209     D1H1(1,1)=d1*(-3*H1(1,1)+4*H1(2,1)-H1(3,1));

```

```

210     D1C1(1,1)=d1*(-3*C1(1,1)+4*C1(2,1)-C1(3,1));
211     %
212     D1F1(nptos,1)=d1*(3*F1(nptos,1)-4*F1(nptos-1,1)+F1(nptos-2,1));
213     D1G1(nptos,1)=d1*(3*G1(nptos,1)-4*G1(nptos-1,1)+G1(nptos-2,1));
214     D1H1(nptos,1)=d1*(3*H1(nptos,1)-4*H1(nptos-1,1)+H1(nptos-2,1));
215     D1C1(nptos,1)=d1*(3*C1(nptos,1)-4*C1(nptos-1,1)+C1(nptos-2,1));
216     %
217     for i=2:nptos-1
218         D1F1(i,1)=d1*(-F1(i-1,1)+F1(i+1,1));
219         D1G1(i,1)=d1*(-G1(i-1,1)+G1(i+1,1));
220         D1H1(i,1)=d1*(-H1(i-1,1)+H1(i+1,1));
221         D1C1(i,1)=d1*(-C1(i-1,1)+C1(i+1,1));
222     end
223     %%% Cálculo das derivadas de segunda ordem: D2F1, D2G1, D2H1 e D2C1 %%%
224     D2F1(1,1)=d2*(2*F1(1,1)-5*F1(2,1)+4*F1(3,1)-F1(4,1));
225     D2G1(1,1)=d2*(2*G1(1,1)-5*G1(2,1)+4*G1(3,1)-G1(4,1));
226     D2H1(1,1)=d2*(2*H1(1,1)-5*H1(2,1)+4*H1(3,1)-H1(4,1));
227     D2C1(1,1)=d2*(2*C1(1,1)-5*C1(2,1)+4*C1(3,1)-C1(4,1));
228     %
229     D2F1(nptos,1)=d2*(2*F1(nptos,1)-5*F1(nptos-1,1)+4*F1(nptos-2,1)...
230         -F1(nptos-3,1));
231     D2G1(nptos,1)=d2*(2*G1(nptos,1)-5*G1(nptos-1,1)+4*G1(nptos-2,1)...
232         -G1(nptos-3,1));
233     D2H1(nptos,1)=d2*(2*H1(nptos,1)-5*H1(nptos-1,1)+4*H1(nptos-2,1)...
234         -H1(nptos-3,1));
235     D2C1(nptos,1)=d2*(2*C1(nptos,1)-5*C1(nptos-1,1)+4*C1(nptos-2,1)...
236         -C1(nptos-3,1));
237     %
238     for i=2:nptos-1
239         D2F1(i,1)=d2*(F1(i-1,1)-2*F1(i,1)+F1(i+1,1));
240         D2G1(i,1)=d2*(G1(i-1,1)-2*G1(i,1)+G1(i+1,1));
241         D2H1(i,1)=d2*(H1(i-1,1)-2*H1(i,1)+H1(i+1,1));
242         D2C1(i,1)=d2*(C1(i-1,1)-2*C1(i,1)+C1(i+1,1));
243     end
244     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Salvando os vetores como arquivo de saída %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
245     fid = fopen('Resultados_sistemaVV1.dat','wt');
246     fprintf(fid,'x F1 G1 H1 C1 D1F1 D1G1 D1H1 D1C1 D2F1 D2G1 D2H1 D2C1 Nul dNul\n');
247     ;
248     for i=1:nptos
249         fprintf(fid,'%4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f %4.10f\n'...
250             ,x(1,i),F1(i,1),G1(i,1),H1(i,1),C1(i,1),D1F1(i,1),D1G1(i,1),D1H1(i,1)...
251             ,D1C1(i,1),D2F1(i,1),D2G1(i,1),D2H1(i,1),D2C1(i,1),Nul(i,1),dNul(i,1));
252     end
253     fclose(fid);
254     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Salvando os dados do workspace %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
255     save('DadosVV1');
256     Tempo=toc
257 end

```

Apêndice C

Painel PEMM 2012

O Painel PEMM tem como objetivo principal a divulgação dos trabalhos desenvolvidos nos diversos grupos de pesquisa do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro e consiste na apresentação de trabalhos de estudantes de graduação e pós-graduação na forma de painéis e apresentações orais, assim como palestras de profissionais com trajetória reconhecida na área de Metalurgia e Materiais.

A edição de 2012 aconteceu nos dias 24, 25 e 26 de outubro de 2012 e os melhores trabalhos de cada categoria foram premiados. A seguir, é exibido o pôster premiado na categoria Mestrado.

Hidrodinâmica de células eletroquímicas com eletrodo semi-esférico rotatório

Rachel Manhães de Lucena^{1*}, José Pontes¹, Norberto Mangiavacchi²

¹ PEMM-COPPE-UFRJ, CP 68505, 21941-972, Rio de Janeiro, RJ

² Grupo de Ensaios e Simulações Ambientais para Reservatórios/GESAR-UERJ, Rua Fonseca Teles 121, 20940-200, Rio de Janeiro, RJ

rachel.lucena@gmail.com, *bolsista de mestrado da FAPERJ

Resumo

Propomos um modelo numérico para a obtenção de resultados para os perfis de velocidades e de concentração para ângulos distintos do eletrodo semi-esférico, através da solução das equações de Navier-Stokes. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para a discretização do problema e o código numérico é elaborado a partir de orientação a objetos. A discretização espacial dos termos difusivos e da pressão é feita pelo método de Galerkin. Utiliza-se, para discretização da derivada substancial, uma abordagem semi-Lagrangeana. O sistema linear é decomposto em blocos LU através do método da projeção discreto e resolvido por método iterativo.

Palavras-Chave: corrosão, eletrodo de disco-rotatório, eletrodo semi-esférico, método dos elementos finitos

1. Introdução

Ao longo dos últimos 15 anos o grupo de pesquisa na área de Eletroquímica Aplicada do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais (PEMM) da COPPE/UFRJ vêm realizando estudos compreendidos tanto nos aspectos experimentais quanto teóricos sobre a hidrodinâmica de células eletroquímicas com eletrodos de disco e semi-esférico rotatórios.

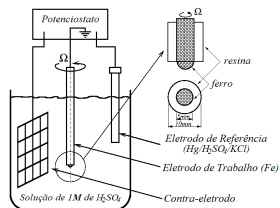


Figura 1: Célula eletroquímica com eletrodo semi-esférico rotatório

O escoamento sobre o disco rotatório é descrito por uma solução similar às soluções encontradas por von Kármán (1921)[1] através da qual as equações diferenciais parciais governantes originais são transformadas em um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares. A utilização do eletrodo de disco rotatório é limitada pela perda da geometria na dissolução do ferro em meios ácidos. O eletrodo semi-esférico, por sua vez, mantém sua geometria nessa mesma dissolução. Entretanto, a abordagem teórica torna-se um grande desafio por não haver uma solução similar da hidrodinâmica referente às proximidades da esfera rotatória.

2. Modelagem matemática e método numérico

Neste trabalho, o escoamento de um fluido newtoniano incompressível é modelado pelas Equações de Navier-Stokes. A seguir, exibimos as equações da continuidade e de Navier-Stokes simplificadas na forma adimensional:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (2)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade, p é a pressão, ρ é a massa específica, ν é a viscosidade cinemática e \mathbf{g} é a gravidade.

A determinação do campo hidrodinâmico através da solução das Eqs. (1) e (2) será dado pelo método numérico denominado Método dos Elementos Finitos; trata-se de um método de discretização, isto é, dado um domínio este é dividido em subdomínios chamados elementos. O conjunto desses elementos é dito malha computacional. Utilizando funções de aproximação que agem sobre esses elementos a solução das equações é calculada por meio de um código numérico.

3. Resultados e discussão

O método dos elementos finitos tem demonstrado grandes avanços em trabalhos científicos na área da mecânica dos fluidos. Porém, para que este seja bem desenvolvido faz-se necessário uma malha computacional consistente com o problema a ser resolvido. Desta forma, os resultados que mostramos até o presente momento são resultados da malha computacional ainda em fase de

aprimoramentos. Após a obtenção da malha mais refinada poderemos calcular os perfis de velocidades e o campo de concentração do problema proposto, ou seja, o escoamento de fluido pelo eletrodo semi-esférico rotatório. A seguir, a Fig. 2 exibe os pré-resultados da malha computacional:

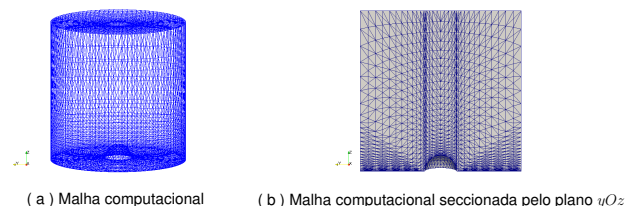


Figura 2: Malha computacional

A Figura 3 mostra a distribuição da magnitude da velocidade do fluido em dois momentos. A Fig. 3(a) no instante $t = 0.3$ mostra o desenvolvimento radial da camada limite na vizinhança do eixo. E a Fig. 3(b) mostra o desenvolvimento da camada limite nas laterais do domínio.

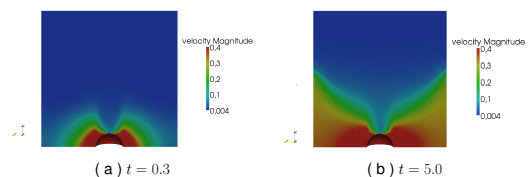


Figura 3: Magnitude da velocidade

4. Agradecimentos

Agradecemos ao PEMM/COPPE/UFRJ pela oportunidade da realização desse trabalho e ao apoio financeiro das agências de fomento: CNPq e FAPERJ.

Referências

- [1] T. von Kármán, Z. Angew. Ueber Laminare und Turbulente Reibung, ZAMM, 1, (1921) 233-252.
- [2] J.G.S. Godínez, Eletrodo semi-esférico rotatório: teoria para o estado estacionário. Tese de D.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.
- [3] L. Howarth, Phil. Mag., v.7, n.42, (1951) 1308.
- [4] G.R. Anjos, Solução do campo hidrodinâmico em células eletroquímicas pelo método dos elementos finitos. Dissertação de M.Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2007.
- [5] T.J.R. Hughes, The finite element method: Linear Static and dynamics finite element analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- [6] M.E. Gurtin, An introduction to continuum mechanics. Academic Press, New York, 1981.
- [7] N. Mangiavacchi, J. Pontes, O. Barcia, Rotating-disk flow stability in electrochemical cells: effect of the transport of a chemical species, Physics of Fluids, v.19 (2007) 114-119

Apêndice D

ENCIT

O Congresso Brasileiro de Ciências Térmicas e de Engenharia - ENCIT - trata-se de uma conferência de alto nível dentro do tema com apresentação de *papers*, sessões técnicas e mesas redondas em várias áreas de conhecimento das ciências térmicas e da engenharia. O ENCIT é promovido pela Sociedade Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM). O ENCIT 2012 foi a 14ª edição da conferência.

Neste apêndice apresentamos o artigo submetido ao ENCIT 2012. O artigo foi elaborado de acordo com os resultados primários obtidos através da presente dissertação.

A seguir, o artigo no formato obrigatório do Congresso.

HYDRODYNAMICS OF ELECTROCHEMICAL CELLS WITH A ROTATING SEMI-SPHERICAL ELECTRODE

Rachel Manhães de Lucena, rachel.lucena@gmail.com

Metallurgy and Materials Engineering Department – Federal University of Rio de Janeiro, PO Box 68505, 21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Gustavo R. Anjos, gustavo.rabello@gmail.com

Group of Environmental Studies for Water Reservatories – GESAR/State University of Rio de Janeiro, Rua Fonseca Teles 121, 20940-200, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Norberto Mangiavacchi, norberto.mangiavacchi@gmail.com

Group of Environmental Studies for Water Reservatories – GESAR/State University of Rio de Janeiro, Rua Fonseca Teles 121, 20940-200, Rio de Janeiro, RJ, Brazil

José Pontes, jopontes@metalmat.ufrj.br

Metallurgy and Materials Engineering Department – Federal University of Rio de Janeiro, PO Box 68505, 21941-972 Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Abstract. *We propose a numerical model to obtain results for the velocity and concentration profiles close to semi-spherical rotating electrodes in electrochemical cells. The profiles refer to nondimensional velocity components along the radial direction, for straight lines ranging from angles with the rotating axis $0 < \theta < \pi/2$ obtained by solving the Navier-Stokes equations using the finite element method. The discretization of the domain is made with an object oriented approach. Spatial discretization of diffusive terms and the pressure is made by the Galerkin method. For the material derivative we use a semi-lagrangian method.*

Keywords: *Corrosion, Rotating Disk Flow, Semi-spherical Electrode, Finite Element Method*

1. INTRODUCTION

In the last 15 years, the group of Applied Electrochemistry of the Federal University of Rio de Janeiro (PEMM/COPPE/UFRJ) has been involved with studies on the hydrodynamics of electrochemical cells having rotating disk electrodes and, in a lesser extent, semi-spherical rotating electrodes, we mention [Godinez \(1996\)](#), [Barcia et al. \(1998\)](#), [Anjos \(2007\)](#) and [Oliveira \(2011\)](#). Rotating disk flow is described by a similarity solution found by [von Kármán \(1921\)](#) through which the original governing PDEs are transformed in a system of nonlinear ODEs. Due to the existence of this similarity solution rotating

disk flow has been widely used as a prototype not only in electrochemistry, but also in other domains, like high speed aerodynamics. The use of rotating disk electrodes present a limitation resulting from the fact that the electrode surface loses its original geometry due to the dissolution of the iron in the acid media of the electrolyte. An alternative configuration consists in employing semi-spherical electrodes, which keep their geometry when dissolved. However, a major challenge appears in the theoretical approach of the problem, due to the fact that a similarity solution of the hydrodynamics no longer exists for the hydrodynamic field close to a rotating sphere.

In 1996, a doctoral thesis developed in the group of applied electrochemistry of the Federal University of Rio de Janeiro dealt with a theoretical study for the hydrodynamic

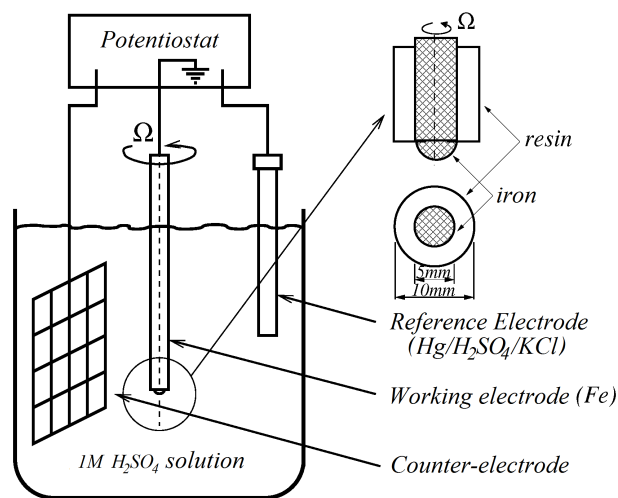


Figure 1. Electrochemical cell with a rotating semi-spherical electrode

and the concentration fields of a chemical species, close to a semi-spherical electrode. Two approaches were employed to describe both fields. In the first one the governing PDEs including the simplifications introduced by the particular geometry were solved numerically and in the second one a series expansion of the velocity components in functions depending on the radial coordinate r was developed.

The subject electrochemical cell comprises a semi-spherical working electrode immersed in a 1M of S_2OH_4 electrolyte solution, turning with specified $\bar{\Omega}$ angular velocity, a counter-electrode and a reference electrode, as schematically sketched in Fig.1.

The governing equations for an incompressible fluid, written in nondimensional form read:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla \cdot [(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)] \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{1}{ReSc}\nabla \cdot (D\nabla c). \quad (3)$$

In the above equations, c is the concentration of the chemical species resulting from the dissolution of the iron electrode in the electrolyte, D is the diffusion coefficient of the species, Re and Sc are the Reynolds and Schmidt numbers, respectively.

The hydrodynamic equations with the simplifications introduced by the geometry of the rotating semi-sphere read:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0}v_\theta = 0 \quad (4)$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{\cot \theta}{r_0}v_\phi^2 = \nu\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} \quad (5)$$

$$v_r\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r_0}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r_0}v_\theta v_\phi = \nu\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2}. \quad (6)$$

In the above equations, r_0 is the radius of the semi-sphere and ν , the kinematic viscosity of the fluid. Boundary conditions for Eqs. (4)-(6) are, in $r = r_0$: $v_r = v_\theta = 0$ and $v_\phi = r_0\bar{\Omega}\sin \theta$, where $\bar{\Omega}$ is the steady angular velocity imposed to the electrode.

A solution of Eqs. (4)-(6) in a power series of θ is given by:

$$v_\theta = r_0\bar{\Omega}F(\theta, \eta) = r_0\bar{\Omega} [\theta F_1(\eta) + \theta^3 F_3(\eta) + \theta^5 F_5(\eta) + \theta^7 F_7(\eta) + \dots] \quad (7)$$

$$v_\phi = r_0\bar{\Omega}G(\theta, \eta) = r_0\bar{\Omega} [\theta G_1(\eta) + \theta^3 G_3(\eta) + \theta^5 G_5(\eta) + \theta^7 G_7(\eta) + \dots] \quad (8)$$

$$v_r = (\nu\bar{\Omega})^{1/2}H(\theta, \eta) = (\nu\bar{\Omega})^{1/2} [H_1(\eta) + \theta^2 H_3(\eta) + \theta^4 H_5(\eta) + \theta^6 H_7(\eta) + \dots], \quad (9)$$

where η is defined by: $\eta = (\bar{\Omega}/\nu)^{1/2}(r - r_0)$ and F_n , G_n and H_n , for $n = 1, 3, 5, 7, \dots$, are nondimensional functions.

Godinez' expansion provides numerically stable solutions of Eqs. (7)-(9) not too close to the sphere equator, namely, for angles $\theta < 80^\circ$, but the results for $\theta > 80^\circ$ are not satisfactory. The purpose of this work is to extend Godinez' results and obtain numerical solutions of the full 3-dimensional equations governing the hydrodynamic and the concentration field of the chemical species originated by dissolution of the semi-spherical iron electrode.

2. FINITE ELEMENT METHOD

The Finite Element Method (FEM) provides a tool for discretizing and solving the original PDEs. The domain is subdivided in small subdomains denoted by finite elements. The ensemble of finite elements define the numerical grid. In short, the method consists in finding an approximate solution of the weak or variational form of the governing equations through the finite element interpolation functions.

2.1 Variational Formulation

The variational formulation is obtained by properly weighting the governing equations, namely, Eqs.(1)-(3). We obtain:

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \cdot \mathbf{w} d\Omega - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p [\nabla \cdot \mathbf{w}] d\Omega + \frac{1}{Re} \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] : \nabla \mathbf{w}^T d\Omega = 0 \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot \mathbf{v}] q d\Omega = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Omega} \frac{Dc}{Dt} r d\Omega + \frac{1}{ReSc} \int_{\Omega} (D\nabla c) \cdot \nabla r^T d\Omega = 0. \quad (12)$$

Functions \mathbf{w} , q and r are the *weighting functions* defined in the space \mathcal{V} with the prescription: $\mathcal{V} := \{\mathbf{w} \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = 0 \text{ in } \Gamma_c\}$, where \mathbf{u}_c is the *essential boundary condition* value, Γ_c a possible boundary for the domain Ω , $\mathcal{H}^1(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega), i = 1, \dots, n \right\}$ and $\mathcal{L}^2(\Omega)$ is the *Lebesgue space*, i. e., the space of all *square integrable* functions. Boundary conditions for this work are: $v_r = v_{\theta} = 0$ and $v_{\phi} = r_0 \bar{\Omega} \sin \theta$, where $\bar{\Omega}$ is the steady angular velocity imposed to the electrode. These conditions approximately mimic an unbounded domain in the radial direction.

2.2 The Semi-discrete Galerkin Method

The semi-discrete Galerkin Method provides a partial discretization where the functions that approximate a solution for the governing equations (Eqs.(10)-(12)) comprise a linear combination of shape functions depending on the time of functions intended to depend on the space coordinates. Following this procedure we denote by NV , NP and NC the number of velocity, pressure and concentration nodes, respectively, of the discrete grid of elements of the original domain Ω . The following semi-discrete approximation functions are obtained:

$$\begin{aligned} v_x(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} u_i(t) N_i(\mathbf{x}), & v_y(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} v_i(t) N_i(\mathbf{x}), & v_z(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NV} w_i(t) N_i(\mathbf{x}), \\ p(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NP} p_i(t) P_i(\mathbf{x}) & \text{and} & & c(\mathbf{x}, t) &\approx \sum_{i=1}^{NC} c_i(t) C_i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

where the coefficients u_i, v_i, w_i, p_i e c_i denote continuous functions in the time (t) and functions $N_i(\mathbf{x})$, $P_i(\mathbf{x})$ and $C_i(\mathbf{x})$ are interpolation functions at specified positions \mathbf{x} for the velocity, pressure and concentration, respectively.

The discretized system becomes, in matrix form:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{Re} \mathbf{K}\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{p} &= 0 \\ \mathbf{D}\mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{M}_c \dot{\mathbf{c}} + \frac{1}{ReSc} \mathbf{K}_c \mathbf{c} &= 0, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_z \end{bmatrix}, & \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_x & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{xz} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_y & \mathbf{K}_{yz} \\ \mathbf{K}_{zx} & \mathbf{K}_{zy} & \mathbf{K}_z \end{bmatrix}, & \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{G}_y & \mathbf{G}_z \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{K}_x &= 2\mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz}, & \mathbf{K}_y &= \mathbf{K}_{xx} + 2\mathbf{K}_{yy} + \mathbf{K}_{zz}, & \mathbf{K}_z &= \mathbf{K}_{xx} + \mathbf{K}_{yy} + 2\mathbf{K}_{zz}, \\ \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_x & \mathbf{D}_y & \mathbf{D}_z \end{bmatrix}, & \dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} & \dot{\mathbf{v}} & \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix}^T, & \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{M}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_c & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_c & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_c \end{bmatrix} & \text{and} & \mathbf{K}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cxx} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{cyy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{czz} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 The semi-lagrangean method

The method considered in this section has been widely used since the 80's in the solution of convective problems. The main favorable features are stability and the large time steps allowed.

One can observe the use of a discrete representation of the substantial derivative in the discretized weak form of the governing equations. In this section we apply the semi-lagrangean method to the substantial derivatives of the governing equations. We obtain:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \quad (13)$$

The global matrix system takes the following discrete form:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_d^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{Re} \mathbf{K} \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{G} p^{n+1} = 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{M}_c \left(\frac{c_i^{n+1} - c_d^n}{\Delta t} \right) + \frac{1}{ReSc} \mathbf{K}_c c^{n+1} = 0, \quad (16)$$

where $\mathbf{v}_d^n = \mathbf{v}^n(x_d, t^n)$, $c_d^n = c^n(x_d, t^n)$ and x_d refers to the starting point in the time $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ with initial condition $x(t^{n+1}) = x_i$.

3. RESULTS

Figure 2(a) shows the numerical grid used in the FEM simulations of the hydrodynamic field close to the semi-spherical electrode. Boundary conditions assume vanishing velocity at the bottom and at the upper free surface. At the electrode surface the fluid turns with the tangential velocity of the semi-sphere. At the sidewalls we specify $p = 0$, a condition that better mimics an infinite domain in the horizontal plane. Fig. 2(b) shows a section along the x direction in \mathbb{R}^3 .

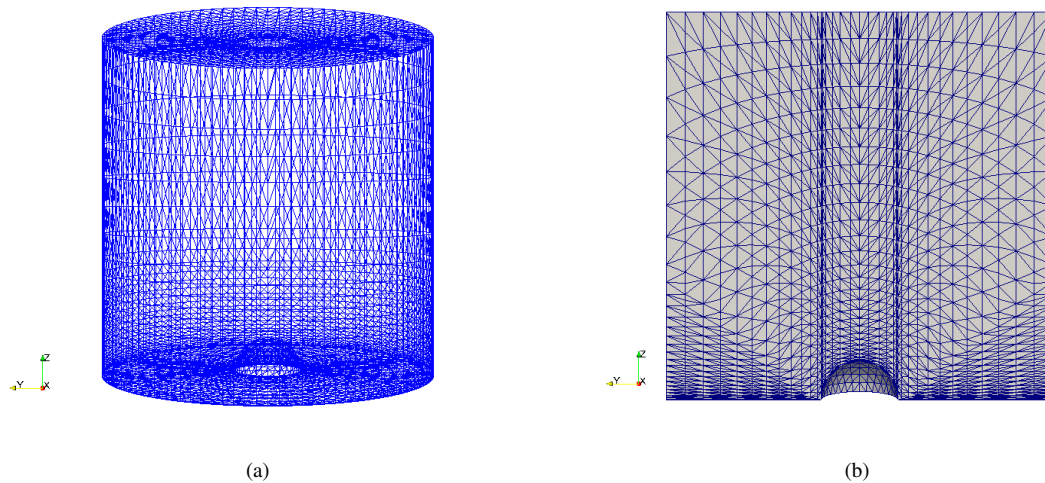


Figure 2. (a) Representation of computational mesh; (b) Sectioned mesh

Figure 3 shows the distribution velocity magnitude at two different times. Figure 3(a) at time $t = 0.3$ shows the radial development of a boundary layer in the neighbourhood of the equator. Figure 3(b) shows the further development of boundary layer towards the lateral boundaries of the domain.

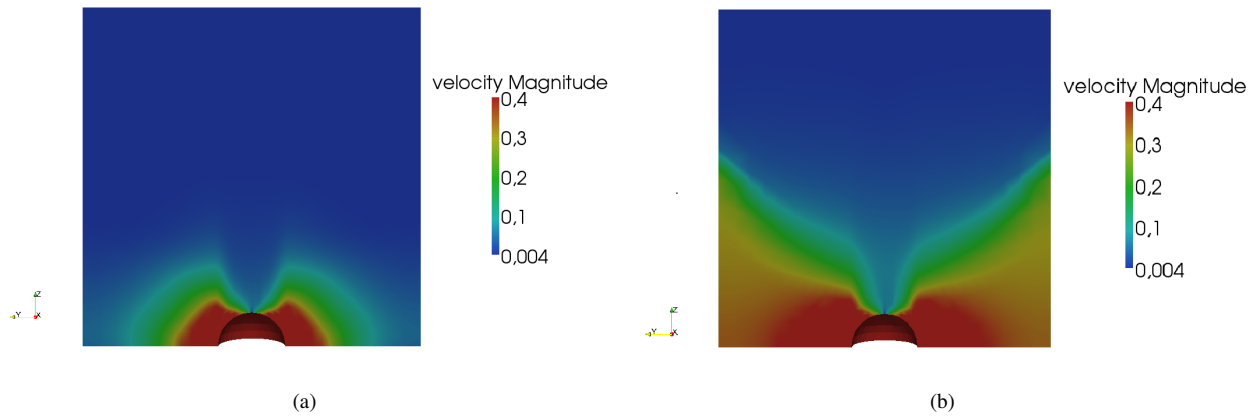


Figure 3. (a) Velocity magnitude at time $t = 0.3$; (b) Velocity magnitude at time $t = 5.0$

Figure 4 shows the distribution z component of the velocity at two different times. Figure 4(a) at time $t = 0.3$ shows the development of a negative velocity close to the pole due to the rotation of the semi-sphere. Figure 4(b) shows the grows of this region towards the lateral boundaries of the domain, and the formation of stagnation regions close to the equator.

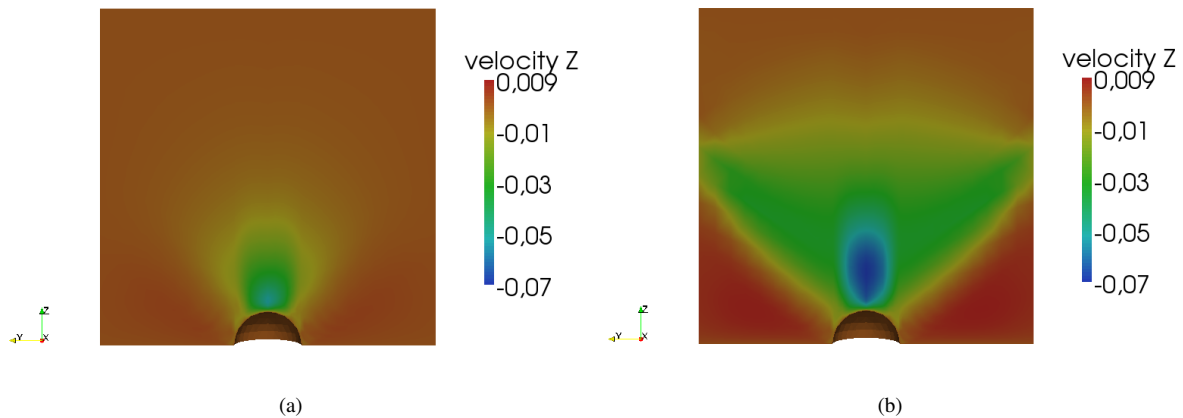


Figure 4. (a) z component of the velocity at time $t = 0.3$; (b) z component of the velocity at time $t = 5.0$

Figure 5 shows the distribution y component of the velocity at the yz plane at two different times. Figure 5(a) at time $t = 0.3$ shows the development of a thin boundary layer from the pole to the equator and then a jet detaching from the equator. Figure 5(b) shows the development of the boundary layer and the jet at later time.

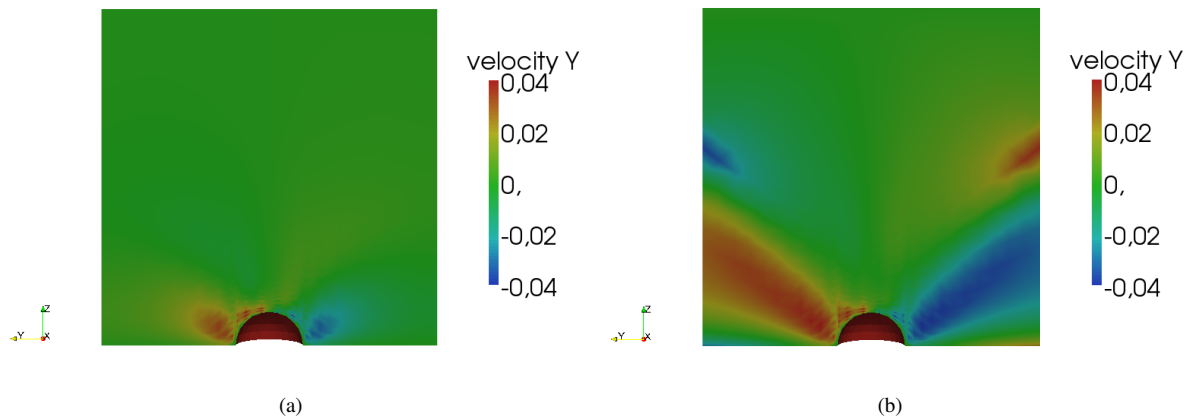


Figure 5. (a) y component of the velocity at the yz plane at time $t = 0.3$; (b) y component of the velocity at the yz plane at time $t = 5.0$

Fig.6 shows the stream lines obtained by solving the governing equations employing the method described in Sec.2. . The stream lines start from the bulk of the flow swirling in the direction of the semi-sphere and then the detach from boundary layer and are ejected outwards.

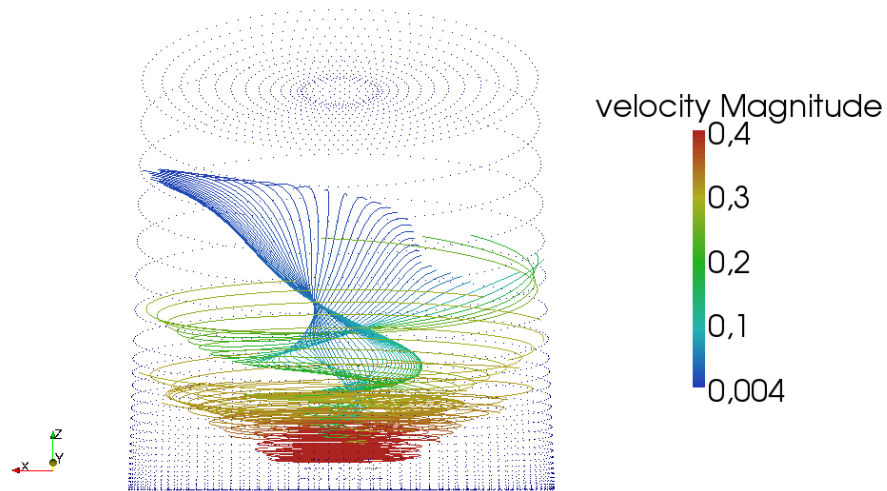


Figure 6. Stream lines

The results are physically consistent with previous results obtained for electrochemical cells with rotating semi-spherical electrodes. We will proceed investigating the influence of mesh refining and domain dimensions on the flow.

4. ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge financial support from the Brazilian agencies FAPERJ and CNPq. They also acknowledge the Group of Environmental Studies for Water Reservoirs – GESAR/State University of Rio de Janeiro, where most simulations here presented were performed.

5. REFERENCES

- Anjos, G.R., 2007. *Solução do campo hidrodinâmico em células eletroquímicas pelo método dos elementos finitos*. M.Sc. dissertation, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Barcia, O.E., Godinez, J.S., Lamego, L., Mattos, O.R. and Tribollet, B., 1998. “Rotating hemispherical electrode - accurate expressions for the limiting current and the convective warbug impedance”. *Journal Electrochemical Society*, Vol. 145, No. 12, pp. 4189–4195.
- Barcia, O., Mangiavacchi, N., Mattos, O. and Tribollet, B., 2000. “Rotating disk flow in electrochemical cells: A coupled solution for hydrodynamic and mass equations”. *Journal of The Electrochemical Society*, Vol. 155, No. 5, pp. 424–427.
- Godinez, J.G.S., 1996. *Eletrodo semi-esférico rotatório: teoria para o estado estacionário*. D.Sc. thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- Mangiavacchi, N., P.J.B.O.E., 2007. “Rotating-disk flow stability in electrochemical cells: Effect of the transport of a chemical species”. *Physics of Fluids*, Vol. 19, pp. 114–119.
- Oliveira, G.C.P., 2011. *Estabilidade hidrodinâmica em células eletroquímicas pelo método de elementos finitos*. M.Sc. dissertation, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.
- von Kármán, T, Z.A., 1921. “Über laminare and turbulente reibung”. *ZAMM*, Vol. 1, pp. 233–252.

6. RESPONSIBILITY NOTICE

The following text, properly adapted to the number of authors, must be included in the last section of the paper: The author(s) is (are) the only responsible for the printed material included in this paper.