



COPPE/UFRJ

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DA
COMINUIÇÃO

Rodrigo Magalhães de Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Metalúrgica e de Materiais, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Metalúrgica e de Materiais.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Rio de Janeiro

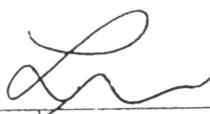
Julho de 2009

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DA
COMINUIÇÃO

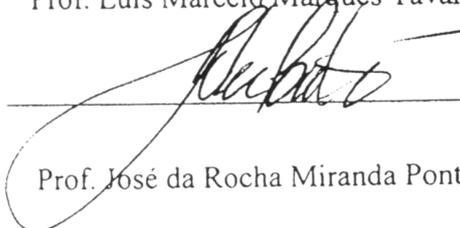
Rodrigo Magalhães de Carvalho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIS COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA METALÚRGICA E DE MATERIAIS.

Aprovada por:



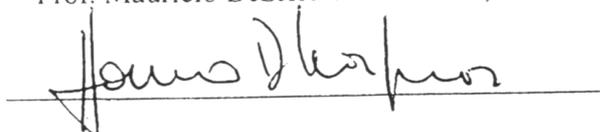
Prof. Luis Marcelo Marques Tavares, Ph.D.



Prof. José da Rocha Miranda Pontes, D.Sc.



Prof. Mauricio Bezerra de Souza Jr., D.Sc.



Prof. Homero Delboni Junior, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2009

Carvalho, Rodrigo Magalhães de

Desenvolvimento de modelo matemático generalizado da
cominuição/Rodrigo Magalhães de Carvalho. – Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2009.

XX, 118 p.; il.; 29,7 cm.

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia Metalúrgica e de Materiais, 2009

Referências Bibliográficas: p. 109-115.

1. Modelagem matemática 2. Cominuição 3. Balanço
populacional. I. Tavares, Luís Marcelo M.. II. Universidade
Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia
Metalúrgica e de Materiais. III. Título

À minha querida esposa Lilian, por todo o carinho
e compreensão neste período de nossas vidas.

Agradecimentos

Agradeço ao orientador e amigo, Prof. Luís Marcelo, por todos os ensinamentos passados nestes seis anos de trabalho. Sua contribuição na minha formação profissional e acadêmica merece destaque. Seu profissionalismo e dedicação é um exemplo a ser seguido.

Agradeço à equipe do Laboratório de Tecnologia Mineral pela realização dos inúmeros ensaios que originaram os resultados necessários para a conclusão deste trabalho,

Agradeço ao Eng. Vladimir Alves que, por meio da Vale, tem apoiado e acreditado na nossa filosofia de pesquisa.

Agradeço ao CNPq, CAPES, AMIRA e Vale pelo financiamento da pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DESENVOLVIMENTO DE MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DA COMINUIÇÃO

Rodrigo Magalhães de Carvalho

Julho/2009

Orientador: Luís Marcelo Marques Tavares

Programa: Engenharia Metalúrgica e de Materiais

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver a formulação inicial de um modelo matemático mecanístico e generalizado para processos de redução de tamanho de partícula. O modelo generalizado proposto é baseado na modelagem da quebra de partículas em conjunto com informações do espectro de energias de colisão obtidas pelo método dos elementos discretos. O modelo matemático generalizado foi validado para processos em escala de laboratório. Devido às características desta modelagem, o resultado final é um modelo completamente preditivo para os processos de cominuição.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DEVELOPMENT OF A GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF
COMMINUTION

Rodrigo Magalhães de Carvalho

July/2009

Advisor: Luís Marcelo Marques Tavares

Department: Metallurgical and Materials Engineering

The aim of the present work is the development of an initial formulation of a generalized and mechanistic mathematical model for particle size reduction processes. The proposed model is based on the modeling of particle breakage at the microscale, gathering information of collision energy spectra obtained using the discrete element method. Data from laboratory scale experiments were used to show that the model is able to simulate the breakage that occurs in a laboratory and industrial mills. Due to intrinsic properties of this modeling, the final result is a fully predictive model for several comminution processes.

SUMÁRIO

Ficha catalográfica.....	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract.....	vii
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xv
LISTA DE SÍMBOLOS	xvi
I - INTRODUÇÃO.....	1
II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	7
II.1 - Visão Geral da Cominuição.....	7
II.2 - Histórico dos modelos matemáticos aplicados aos processos de cominuição	10
II.2.1 - Modelos de primeira geração	10
II.2.2 - A segunda geração de modelos	17
II.2.3 - Modelos de terceira geração	34
II.3 - Modelagem em microescala	52
II.3.1 - Mecânica do Dano	52
II.3.2 - Descrição matemática dos mecanismos de quebra.....	59
III - DESENVOLVIMENTO DO MODELO.....	64
III.1 - Formulação geral do modelo	65

IV - RESULTADOS E DISCUSSÃO	76
IV.1 - Modelagem do único evento de impacto.....	76
IV.2 - Simulação da degradação por manuseio.....	80
IV.3 - Modelagem da moagem em batelada em escala de laboratório	85
IV.3.1 - Estudo de parâmetros e sensibilidade do modelo ao espectro de energias de impacto fornecido pelo DEM no caso da moagem em batelada	85
IV.3.2 - Simulações da moagem em batelada.....	90
IV.4 - Modelagem da moagem contínua em moinho de bolas	99
IV.5 - O MGC na descrição da moagem semi-autógena	101
IV.6 - Aplicação do MGC a um tipo de britador	102
V - CONCLUSÕES	107
VI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	109
APÊNDICE A - Algoritmo de solução do MGC	116
APÊNDICE B - LISTA DE PUBLICAÇÕES	117
APÊNDICE C - LISTA DE ABREVIATURAS.....	118

LISTA DE FIGURAS

Figura I.1 - Britador de eixo vertical Barmac [®] (Metso).....	2
Figura I.2 - Moinho de bolas (Allis Chalmers).	2
Figura II.1 - Métodos de aplicação de esforços em equipamentos de cominuição: aplicação de cargas diretamente entre duas superfícies sólidas a partículas individuais (a) e leitos de partículas (b); projeção de partículas contra uma superfície sólida (c) ou de partículas umas contra as outras (d); utilização de ferramentas de corte (e); aplicação de cisalhamento (f); aplicação de energia não-mecânica – como microondas, choques elétricos, calor, plasmas, etc (g) e quebra superficial devido à abrasão (h).	7
Figura II.2 - Análise granulométrica típica do produto final de um circuito de moagem de cimento portland (Carvalho, 2007).....	9
Figura II.3 - Aparato para determinação experimental do W_i de impacto (Tavares e Carvalho, 2007).	12
Figura II.4 - Ilustração do modelo simplificado para o cálculo do torque necessário para girar um moinho tubular (King, 2001).	14
Figura II.5 - Ilustração da geometria de um moinho tubular.....	16
Figura II.6 - Esquema representativo do balanço populacional microscópico (Carvalho, 2007).....	20
Figura II.7 - Proporção de partículas remanescentes ao longo do tempo e cinética de primeira ordem na moagem descontínua de minério de calcário (Tavares e Carvalho, 2009a).	23
Figura II.8 - Taxas de quebra de ordem diferentes de um.....	24
Figura II.9 - Representação esquemática do modelo de britagem (Napier-Munn <i>et al.</i> , 1996).....	25
Figura II.10 - Exemplo típico de função quebra.....	28

Figura II.11 - Esquema representativo do ensaio de queda de peso (DWT – <i>Drop Weight Test</i>) utilizado na determinação da função quebra dos materiais (King, 2001).	28
Figura II.12 - Geração de partículas a partir da quebra por clivagem de uma partícula mãe (original).	29
Figura II.13 - Produto do ensaio de DWT de minério de cobre no tamanho original de 22,4 x 19,2 mm para diferentes energias específicas de impacto.....	31
Figura II.14 - Relação entre o t_{10} e a energia específica de impacto (E) utilizada na quebra de partículas de minério de cobre no ensaio DWT. Pontos são os resultados experimentais e a linha são os dados calculados pelo modelo da Equação II.33 para $A=87,0$ e $b=0,247$	32
Figura II.15 - Dados de t_{10} contra t_n s para o resultado de DWT de minério de cobre apresentado na Figura II.13 (pontos), e curvas simuladas (linhas sólidas) utilizando o modelo da função beta incompleta.	33
Figura II.16 - Comparação do movimento da carga em um moinho de bolas operando a 70 % da velocidade crítica com enchimento de 20 % de laboratório com a simulação por DEM (Rajamani <i>et al.</i> , 2000).	39
Figura II.17 - Simulações obtidas por DEM (a) britador cônico de laboratório B90 (Lichter <i>et al.</i> , 2009) (b) transporte e manuseio de partículas no beneficiamento de carvão (EDEM [®] – www.demsolutions.com).....	39
Figura II.18 - Espectro de colisões normais e tangenciais para um moinho de bolas de 0,30 m x 0,30 m, com enchimento de 30 %, simulado por DEM tridimensional (Tavares e Carvalho, 2009a).....	40
Figura II.19 - Esquema do dispositivo da célula de carga de impacto ultra-rápida (Tavares, 2007).	47
Figura II.20 - Seis perfis força-tempo gravados para partículas de quartzo na faixa de 1,00 x 1,18 mm impactadas utilizando uma esfera de aço de 0,0283 kg na velocidade de 1,16 m/s. As setas mostram o instante da fratura. A variação na resposta dentre as partículas individuais é evidente (Tavares e King, 1998).	47

Figura II.21 - Probabilidades de quebra e distribuição de energias específicas de fratura de partículas de 45,0 x 37,5 mm de bauxita (Tavares, 2007).....	48
Figura II.22 - Distribuição de energias de fratura antes e após um processo de cominuição em que todas as partículas são submetidas a impacto de energia específica igual a 100 J/kg.....	50
Figura II.23 - Esquemática da simulação do impacto de uma esfera sobre um leito de partículas. A esfera é lançada verticalmente para baixo com velocidade inicial v_0 (Potapov e Campbell, 2000).	50
Figura II.24 - Ilustração do enfraquecimento devido ao acúmulo de dano de uma partícula submetida a repetidos impactos (Tavares, 2007).....	54
Figura II.25 - Simulação de três eventos de carregamento seqüenciais utilizando $\gamma = 3,3$, dados de energia de fratura da Figura II.21 e a energia de impacto $E_{k,n} = 70,6$ J/kg idêntica em todos os eventos simulados (Tavares e Carvalho, 2007).....	57
Figura II.26 - Proporção quebrada acumulada experimental (triângulos) de partículas de bauxita contidas na faixa de 45 x 37,5 mm e simulada (pontos) após repetidos impactos em dois níveis diferentes de energia. A linha sólida é o ajuste dos pontos simulados para $\gamma = 3,3$ (Tavares, 2009).....	58
Figura II.27 - Produto do ensaio de abrasão JKMRC para um calcário indicando o valor do parâmetro P_A	61
Figura III.1 - Esquema representativo do MGC.....	65
Figura III.2 - Exemplos de modos de impacto (a) Partícula-revestimento (b) Partícula-partícula e (c) Corpo moedor-partícula.	66
Figura III.3- Representação gráfica do impacto de um corpo moedor sobre um leito de partículas (Barrios e Tavares, 2009).....	66
Figura III.4 - Seqüência de mecanismos para um evento de quebra.	68

Figura III.5 - Ilustração do processo de composição da energia de fratura após um ciclo de eventos de quebra.....	70
Figura IV.1 – Simulação (linhas sólidas), utilizando o MGC, da quebra de partículas de quartzo individuais e em leitos comparados aos dados experimentais (símbolos) obtidos por Bourgeois (1993).....	80
Figura IV.2 - Exemplo de transporte de minérios da usina até um navio com as alturas de queda em cada transferência.	81
Figura IV.3 - Resultados experimentais (símbolos) e simulados (linhas) mostrando as distribuições de tamanhos de partículas após repetidas quedas de partículas de minério de ferro na faixa de tamanho 125 x 63 mm contra uma superfície de aço de uma altura de 4 metros.	82
Figura IV.4 - Resultados experimentais (símbolos) e simulados (linhas) mostrando a proporção de material fino gerado (-6,4 mm) após quedas livres a partir de duas alturas diferentes de partículas de minério de ferro contidas na faixa de 125 x 63 mm. Simulações para a queda de uma altura de 2 metros também são mostradas para impactos contra outras superfícies.....	83
Figura IV.5 - Foto do interior do moinho de bolas de laboratório (30 x 30 cm e corpos moedores de aço de 25 mm de diâmetro) utilizado nos ensaios de validação e ilustração do mesmo moinho implementado no software EDEM®.	87
Figura IV.6 - Potência dissipada em função da energia de truncamento inferior do espectro de energias de impacto para o caso 1.	90
Figura IV.7 -Proporção remanescente na classe original de tamanho em função do tempo na moagem descontínua de um minério de calcário. Os pontos são os dados experimentais e as linhas são os dados simulados utilizando o modelo generalizado...	93
Figura IV.8 -Proporção remanescente na classe original de tamanho em função do tempo na moagem descontínua de granulito. Os pontos são os dados experimentais e as linhas são os dados simulados utilizando o modelo generalizado.....	93

Figura IV.9 - Variação da mediana da energia específica de fratura com o tamanho de partícula.	94
Figura IV.10 - Espectro de energias de impacto truncado em 10^{-4} J para o moinho descontínuo (símbolos) e distribuição de energias de fratura de alguns monotamanhos de granulito (calculadas utilizando as Equações III.7 a III.9).	94
Figura IV.11 - Variação da distribuição de energias de fratura das partículas de granulito na faixa de tamanhos 9,5 x 6,3 mm ao longo do tempo de moagem.....	95
Figura IV.12 - Resultados da moagem descontínua para um minério de cobre com tamanho inicial menor que 1,68 mm. Os pontos representam os dados experimentais enquanto que as linhas contínuas são os dados simulados utilizando o MGC.....	96
Figura IV.13 - Resultados da moagem descontínua para um granulito com tamanho inicial menor que 4,75 mm. Os pontos representam os dados experimentais enquanto que as linhas contínuas são os dados simulados utilizando o MGC.....	98
Figura IV.14 - Variação do d_{80} e da mediana da energia específica de fratura da classe $i=3$ do componente 1 ($E_{50,3,1}$) como função do tempo para a mudança na composição da alimentação após 5 minutos de moagem.	100
Figura IV.15 - Variação do d_{80} na simulação da moagem contínua após a mudança na composição da alimentação no tempo de 5 minutos.	101
Figura IV.16 - Diagrama esquemático do britador horizontal de martelos.	103
Figura IV.17 - Ilustração do processo de quebra no britador horizontal de impactos..	103

LISTA DE TABELAS

Tabela II.1 - <i>Appearance function</i> para o minério de cobre da Figura II.13	32
Tabela II.2 – Parâmetros α_n e β_n para o minério de cobre apresentado (Figura II.13) ..	34
Tabela III.1 - Mecanismos de quebra considerados no MGC e sua relevância em processos de cominuição (Carvalho e Tavares, 2009)	67
Tabela III.2 - Matriz de colisões em um moinho de bolas	74
Tabela III.3 - Classe de colisões e tipo de colisão associado	75
Tabela IV.1 - Configuração do leito sua correlação com o número de partículas capturadas para o ensaio apresentado na Figura IV.1 (Barrios e Tavares, 2009).....	79
Tabela IV.2 - Lista de parâmetros do MGC para o quartzo, utilizados na simulação dos ensaios de quebra realizados por Bourgeois (1993)	79
Tabela IV.3 - Resultados da simulação do transporte de acordo com o fluxograma hipotético da Figura IV.2.....	83
Tabela IV.4 - Parâmetros do minério de ferro.....	84
Tabela IV.5 - Listagem das simulações por DEM do moinho descontínuo de	88
Tabela IV.6 - Potência calculada para as simulações DEM do moinho operando em batelada.....	88
Tabela IV.7- Condições operacionais do moinho de bolas descontínuo de laboratório utilizado nas simulações da moagem descontínua	91
Tabela IV.8 - Parâmetros da simulação do moinho pelo método dos elementos discretos no software EDEM [®] utilizando o modelo de Hertz-Mindlin (sem escorregamento).....	91
Tabela IV.9 - Parâmetros MGC utilizados nas simulações de moagem descontínua dos três materiais.....	97

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos

A	parâmetro do modelo de determinação do t_{10} em função da energia de impacto
A_{80}	abertura de peneira no qual 80% das partículas é passante
a_e	parâmetro da equação do número de partículas capturadas
a_{ijl}	função quebra da abrasão na forma distribuída
A_{ilk}^b	termo de aparecimento de material na classe il devido à quebra por impacto de material da classe jl para colisões da classe k
A_{ilk}^s	termo de aparecimento de material na classe il devido ao desgaste por abrasão de material da classe jl para colisões da classe k
A_n	parâmetros de ajuste do modelo de britagem de Whiten
B	função quebra na forma matricial
b	parâmetro do modelo de determinação do t_{10} em função da energia de impacto
b'	parâmetro do modelo de determinação do t_{10} em função razão da energia de impacto e a energia de fratura
$B(x, x')$	função quebra na forma contínua e acumulada
$B_d(e', p)$	função quebra relativa ao leito de partículas
b_e	parâmetro da equação do número de partículas capturadas
B_{ij}	função quebra na forma discreta e acumulada
$b_{ijk}(eE, t)$	elemento ij da função quebra do material da classe l quando este é submetido a uma colisão da classe k de magnitude energética eE
$B_M(p)$	função quebra para o moinho de bolas segundo o modelo do Cho
B_n	parâmetros de ajuste do modelo de britagem de Whiten
c	coeficiente de restituição no modelo de contato de Hertz-Mindlin
$C(x)$	função de classificação de britadores do modelo do Whiten
Cb	espessura da partícula
c_i	elemento da curva de partição referente à classe de tamanho i
c_n	coeficiente de restituição normal
CSS	posição de malha fechada
c_t	coeficiente de restituição tangencial
d	diâmetro de uma partícula esférica
D	parâmetro de acúmulo do dano
d_0	tamanho original das partículas
d_{50}	tamanho no qual 50 % da população de partículas é menor
d_{80}	tamanho no qual 80 % da população de partículas é menor
d_{90}	tamanho no qual 90 % da população de partículas é menor
D_a	parâmetro da função de quebra por abrasão
d_b	diâmetro das bolas (corpos moedores)
d_i	tamanho representativo de partículas na classe i (tamanho de partícula)
D_{ilk}^b	termo de desaparecimento de material na classe il devido à quebra por impacto de material da classe jl para colisões da classe k
D_{ilk}^s	termo de desaparecimento de material na classe il devido ao desgaste por abrasão de material da classe jl para colisões da classe k
D_m	diâmetro do moinho
d_o	parâmetro da relação entre a energia de fratura e o tamanho de partícula

E	energia de impacto ou de fratura
e	fração da energia de impacto absorvida pelas partículas
E_{∞}	parâmetro da relação entre a energia de fratura e o tamanho de partícula
$E(e)$	energia associada ao nível energético e' no modelo do Cho
e'	nível energético do modelo de Cho
E_{50il}	mediana da distribuição de energia específica de fratura do material na classe il
E_{CS}	energia específica consumida no impacto
E_{il}^*	máxima energia de fratura das partículas da classe il
E_{max}	energia de truncamento superior da distribuição de energias de fratura
E_{min}	parâmetro de truncamento inferior do espectro de energias de impacto ajustado pela equação de Rosin-Rammler
E_P	parâmetro da equação de Rosin-Rammler para o espectro de energias de impacto
E_t	deslocamento excêntrico do britador
$f(e)$	fração de energia e' e no espectro de energias de impacto.
$F(E,t)$	distribuição de energias de fratura no tempo t
\mathbf{f}^d	força de amortecimento
\mathbf{F}_i	força que atua sobre a partícula i
$F_{il}(E,t)$	distribuição de energias de fratura das partículas da classe il no tempo t
$F_{il}^*(E,t)$	distribuição de energias de fratura das partículas da classe il que não quebraram e sofreram dano no tempo t
\mathbf{f}^r	força repulsiva
\mathbf{g}	força gravitacional
G_{il}	fração de material da classe i que foi apenas danificado, permanecendo na classe de tamanho original
H_{il}	fração de material da classe il que apareceu devido à quebra de partículas maiores ou da própria classe de tamanho i no intervalo dt
i	índice da classe de tamanhos
I_i	momento de inércia de uma partícula i
I_{il}	fração de material da classe il que não é capturada no intervalo dt
j	índice da classe de tamanhos
J_t	grau de enchimento total do moinho
K	constante de calibração do cálculo da potência
k	índice da classe de colisões
K_1	fator de carregamento no cálculo da potência do moinho
$K1$	parâmetros do modelo de britagem de Whiten
$K2$	parâmetros do modelo de britagem de Whiten
$k_{aço}$	rigidez do aço
k_d	constante de restituição
K_n	parâmetros empíricos para correção do índice de trabalho de Bond
k_p	rigidez das partículas
k_r	constante de rigidez
$k_{superfície}$	rigidez da superfície de impacto
K_w	constante de redução de tamanhos nos modelos de primeira geração
L	comprimento do moinho
l	índice da classe de componentes
L_e	comprimento efetivo do moinho
L_{hr}	idade do revestimento do britador
L_{len}	comprimento da face do revestimento do britador

m	índice dos eventos de quebra na equação discretizada no tempo
M	massa de material no ambiente de quebra (<i>hold-up</i>)
M^*	massa de referência na equação do transporte de material para um moinho contínuo de laboratório
M_c	massa total da carga
M_i	massa de uma partícula i
m_{il}	massa de partículas da classe il capturadas em um único impacto
$m_{p,il}$	massa de uma partícula da classe il
n	índice do conjunto de funções baseados no parâmetro t_{10}
n_1	parâmetro da função quebra de Austin
n_2	parâmetro da função quebra de Austin
N_c	velocidade crítica do moinho
$N_{cap,il}$	número de partículas da classe il capturadas em um único impacto
N_{cm}	número classes de tamanhos de corpos moedores
\mathbf{n}_i	vetor unitário que sai do centro da partícula i e aponta no sentido da partícula j
N_k	número de classes (k) de colisão
N_r	freqüência de rotações do moinho
N_{rev}	número de revestimentos diferentes
$P(d_i)$	porcentagem de material passante no tamanho representativo d_i
$p(E)$	espectro de energias de impacto na forma distribuída
$P(E)$	espectro de energias de impacto na forma acumulada
$p(e)$	função de repartição de energia
P_{80}	abertura de peneira no qual 80% das partículas é passante
P_a	parâmetro referente a taxa de quebra por abrasão
$p_k(E)$	espectro de energias de impacto das colisões da classe k
$P_{líq. carga}$	potência líquida consumida pela carga
$P_{líq.}$	potência líquida consumida no moinho
P_m	potência do moinho
Q_{il}	fração de material da classe il que entra no processo no intervalo dt
Q_{in}	fluxo de entrada no volume de controle
Q_{out}	fluxo de saída do volume de controle
s_1	taxa de quebra de partículas da classe de tamanho 1
s_1^E	taxa de quebra no modelo de Cho
t	instante de tempo
T	torque necessário para girar um moinho
t_{10}	porcentagem de material gerado na quebra que é menor que o tamanho equivalente a 10% do tamanho original da partícula
T_f	torque necessário para superar o atrito
\mathbf{T}_i	torque que atua sobre a partícula i
t_n	porcentagem de material gerado na quebra que é menor que o tamanho equivalente a n % do tamanho original da partícula
V	volume de controle
$v^{(j)}$	taxa de mudança na propriedade j
\mathbf{v}_i	vetor velocidade linear de uma partícula i
\mathbf{w}_f	vetor de frações mássicas da alimentação no modelo de Whiten
W_i	índice de trabalho na moagem
W_{iD}	W_i corrigido
w_i^e	fração de material que quebra na aplicação de energia $E(e')$ no modelo de Cho

W_I	índice de trabalho de impacto
w_{il}^{in}	fração de material novo na classe il que entra no processo
w_{il}^{out}	fração de material na classe il que deixa o ambiente de quebra
w_{il}^P	fração de material na classe il deixa o processo (produto)
w_{il}^r	fração de material na classe il que retorna ao processo
W^{in}	taxa de material novo alimentado ao processo
W^{out}	taxa de material que deixa o ambiente de quebra
W^P	taxa de material que deixa o processo (produto)
\mathbf{w}_p	vetor de frações mássicas do produto no modelo de Whiten
W^r	taxa de material que é retroalimentado ao moinho
x	tamanho de partícula contínuo
x'	tamanho de partícula contínuo
y	variável de integração da função beta incompleta
Y	módulo de Young

Símbolos gregos

α_n	parâmetro da função beta incompleta para o índice n
α_P	parâmetro do cálculo da potência de um moinho
β_n	parâmetro da função beta incompleta para o índice n
γ	coeficiente de acúmulo de dano
δ	função delta Dirac
Δt	variação discreta no tempo
ε	variável de integração para as energias de impacto
ζ_j	quantidade da propriedade j
η	parâmetro da equação de Rosin-Rammler para o espectro de energias de impacto
θ	parâmetro correspondente ao grau de enchimento do moinho
κ_{il}	taxa de quebra por abrasão do material na classe il
λ_a	parâmetro da função de quebra por abrasão
μ_r	coeficiente de atrito de rolamento no modelo de contato de Hertz-Mindlin
μ_s	coeficiente de atrito estático no modelo de contato de Hertz-Mindlin
ξ	parâmetro correspondente à velocidade de rotação do moinho
\bar{E}	perfil de deslocamento da carga (aplicação de esforços)
ρ	massa específica
ρ_c	massa específica da carga
σ	desvio padrão da distribuição lognormal
ν	razão de Poisson
Φ	fração do produto da quebra que contribui para a fração fina
φ_c	fração da velocidade crítica do moinho
φ_{max}	parâmetro do modelo de Morrell para o cálculo da potência do moinho
ψ	parâmetro do modelo de Morrell para o cálculo da potência do moinho
Ψ_{in}	distribuição numérica de partículas que entram no volume de controle
Ψ_{out}	distribuição numérica de partículas que saem do volume de controle
ω	freqüência total de colisões
ω_i	vetor velocidade angular de uma partícula i
ω_k	freqüência de colisões da classe k
$\bar{\Psi}$	distribuição numérica de partículas
$\dot{\delta}_n$	taxa de deformação normal
$\dot{\delta}_t$	taxa de deformação tangencial
ϑ	deformação
ϕ	parâmetro da relação entre a energia de fratura e o tamanho de partícula
ϑ_n	máxima deformação alcançado durante o n -ésimo evento de carregamento

I - INTRODUÇÃO

A palavra cominuir tem sua origem no Latim e significa “tornar pequeno”. As operações de cominuição ou de redução de tamanho de partículas sólidas estão presentes em diversas áreas da indústria, como as indústrias mineral, química, cerâmica, alimentícia e farmacêutica.

A indústria mineral é a maior usuária das operações de cominuição, pois é através da redução de tamanho das partículas de rocha, de centenas de milímetros até da ordem de micrômetros, que se consegue fazer com que o mineral de interesse se liberte da ganga, que é fração do mineral sem interesse comercial. O minério liberado segue a cadeia de processo sendo direcionado às etapas de concentração e extração do metal de interesse comercial. A indústria mineral se caracteriza por processar uma grande quantidade de matérias primas, a taxas que podem ultrapassar 160000 t/dia de minério *run-of-mine* (retirado da mina) alimentado ao circuito de cominuição.

Qualquer processo que necessite reduzir o tamanho de partículas sólidas é caracterizado por uma alta demanda energética. Estima-se que as operações de cominuição consumam, direta e indiretamente, por volta de 3% de toda energia elétrica produzida no mundo (Schönert, 1986; Fuerstenau e Abouzeid, 2002).

Os processos de cominuição podem ser representados por dois grandes grupos de equipamentos: britadores e moinhos. Os britadores representam geralmente o primeiro estágio dos circuitos de cominuição, ou seja, após o desmonte mecânico ou com explosivos as rochas são alimentadas a estes equipamentos que têm por objetivo reduzir o tamanho das partículas até a faixa de operação utilizada nos moinhos. Alternativamente, os britadores também são empregados amplamente na produção de agregados para construção civil, sendo responsáveis pela geração de um produto final vendável. Um exemplo é o britador de eixo vertical da Figura I.1.

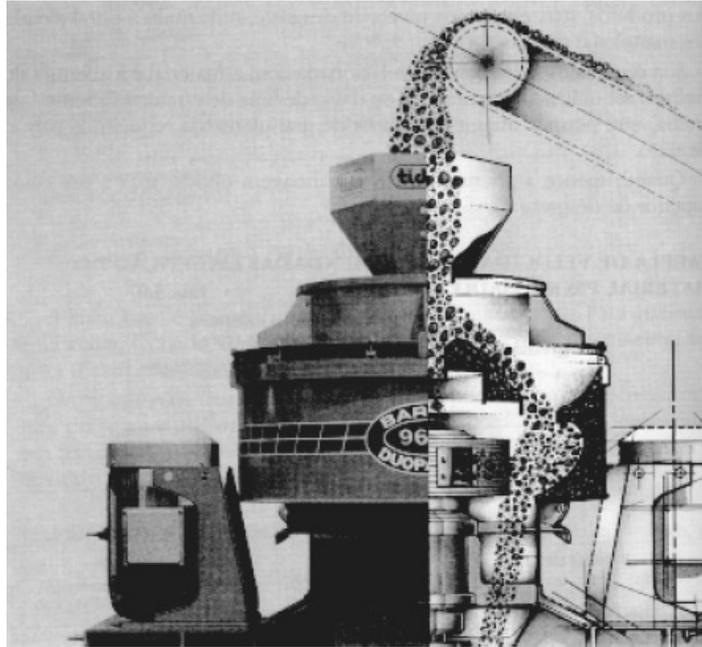


Figura I.1 - Britador de eixo vertical Barmac[®] (Metso).

A moagem geralmente representa o último estágio dos circuitos de cominuição e pode ser realizada por diversos tipos de moinhos, que na sua maioria são carcaças de aço tubulares (Figura I.2). Estes moinhos são movimentados por um motor e giram em torno de seu eixo horizontal, possuindo em seu interior, corpos moedores.

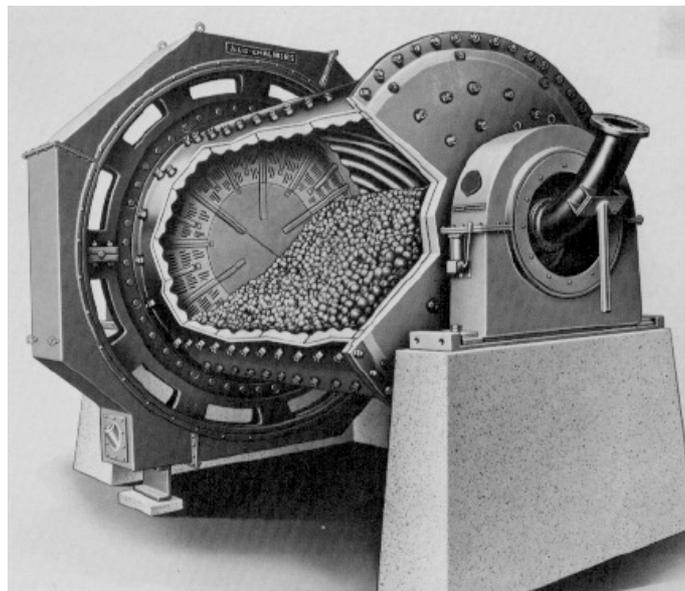


Figura I.2 - Moinho de bolas (Allis Chalmers).

Cada equipamento utilizado nas operações de cominuição possui particularidades na aplicação de esforços mecânicos sobre as partículas que se deseja reduzir de tamanho. Nos moinhos de bolas, as partículas são fragmentadas pela ação de impacto das esferas de aço. Nos moinhos semi-autógenos, que também são moinhos tubulares, a quebra ocorre devido ao impacto das próprias partículas de minério contra partículas menores e também por impacto dos corpos moedores contra as partículas. Os moinhos autógenos (ou de seixos) são semelhantes aos semi-autógenos, porém nestes os corpos moedores são as próprias partículas do minério.

Historicamente a alta demanda energética de operações de britagem e moagem tem motivado pesquisadores e engenheiros na busca pela operação em condições ótimas e ganhos no aproveitamento energético, pois qualquer redução na energia consumida pode representar grande economia no processo como um todo. Esta busca pelo ótimo demanda um conhecimento detalhado dos mecanismos que regem a aplicação de energia na fragmentação das partículas em cada um dos equipamentos de cominuição.

Desde o final do século XIX, tentou-se compreender como a energia era aplicada e aproveitada na redução de tamanho de partículas. As primeiras definições quantitativas (completamente empíricas) surgiram nesta época. Entretanto foi em meados de 1950 que Fred Bond, da antiga Allis Chalmers, propôs uma metodologia empírica, de escalonamento de moinhos baseada em ensaios de moagem em batelada realizados em laboratório. O método de Bond é utilizado até hoje com relativo sucesso, sobretudo em função de sua grande praticidade na estimativa do consumo energético demandado na moagem e pela razoável estimativa em relação ao consumo energético real em moinhos industriais.

A partir da década de 1970, o uso do modelo do balanço populacional (MBP) se tornou bastante popular como ferramenta de modelagem dos processos de cominuição. A partir do modelo do balanço populacional, diversos pesquisadores (Austin *et al.*, 1984, Whiten, 1972, Herbst e Fuerstenau, 1973) desenvolveram metodologias semelhantes, embora com algumas particularidades na sua aplicação. Na prática, o balanço populacional aplicado à cominuição se torna um balanço de massas por classes de tamanho de partículas e sua utilização depende da caracterização de funções que descrevem o movimento da massa através das classes de tamanho como, por exemplo, as funções de distribuição de quebra e seleção. O modelo do balanço populacional se

tornou bastante popular ao longo das décadas de 80 e 90, permitindo aos pesquisadores e engenheiros simular a operação de usinas com erros da ordem de 2 % (Herbst, 2004).

O modelo do balanço populacional permitiu caracterizar as propriedades de quebra em laboratório e através de relações empíricas, como as propostas por Austin *et al.* (1984), as escalonar para moinhos industriais. Apesar do relativo sucesso da modelagem dos processos de cominuição utilizando o balanço populacional, este apresentava sérias limitações. O modelo tal qual é utilizado não considera a variabilidade natural das características de quebra dos materiais, como a resistência à fratura das partículas (ou energia de fratura). A modelagem empírica baseada no MBP é incapaz de desacoplar os efeitos relacionados ao equipamento de cominuição das propriedades intrínsecas de quebra do material processado. Pode-se citar ainda a dificuldade de se investigar a influência de características construtivas e operacionais de equipamentos na cominuição, como é o caso do efeito de diferentes perfis de revestimento e tamanho dos corpos moedores nos moinhos de bolas.

Diante das limitações apresentadas pelo modelo do balanço populacional clássico, alguns pesquisadores já na década de 1980 defendiam que grandes avanços na modelagem da cominuição teriam que ocorrer por meio do desenvolvimento de modelos mecanísticos. A compreensão dos mecanismos envolvidos na redução de tamanhos de partícula e como esses mecanismos estariam relacionados à aplicação dos esforços foi alvo de diversos estudos da época. Foram publicados estudos abordando os mecanismos de quebra de partículas individuais quando estas eram impactadas sobre superfícies planas ou sobre leitos, de forma a simular os eventos que ocorrem no interior de moinhos e britadores (Cho, 1987). Embora estes estudos se mostrassem promissores ainda haviam limitações quanto à aplicabilidade dos modelos obtidos.

Paralelamente ao avanço do entendimento dos mecanismos de quebra das partículas, havia a necessidade de compreender as características do ambiente de cominuição nos moinhos e britadores. Seguindo a linha dos modelos mecanísticos, Mishra e Rajamani (1992) aplicaram o método dos elementos discretos ou, *discrete element method* (DEM), ao ambiente de moagem, considerando um moinho de bolas como um conjunto de fatias circulares. O método dos elementos discretos consiste na aplicação das leis de movimento de Newton para estudar o movimento da carga dos moinhos ou como as forças são aplicadas sobre as partículas no interior de britadores. O DEM aplicado à

modelagem da cominuição avançou significativamente na década de 90, acompanhando o aumento da capacidade de processamento dos computadores. Porém, o método dos elementos discretos, embora seja capaz de fornecer informações valiosas sobre os sistemas de cominuição, ainda não permite simular o processo de redução de tamanhos de partícula de maneira que seja viável prever completamente o produto de quebra.

Um melhor entendimento dos eventos de quebra que ocorrem em cada tipo de equipamento de cominuição vem permitir a descrição e separação dos mecanismos envolvidos na fratura das partículas, sendo possível descrever processos de cominuição tão distintos quanto aqueles que ocorrem durante o manuseio e transporte, a moagem, contemplando a quebra por impacto de corpos moedores, impactos autógenos e abrasão.

No início dos anos 90, diversos resultados envolvendo a caracterização dos mecanismos de quebra de partículas individuais foram publicados, melhorando ainda mais o entendimento sobre o comportamento das partículas quando submetidos a diversos tipos de esforços (impacto, compressão, abrasão). Baseado nisto e com o objetivo de desacoplar as influências do material e do ambiente de cominuição, analisando-se os eventos de quebra individualmente, King e Bourgeois (1993) propuseram um modelo baseado no modelo do balanço populacional. Este tipo de abordagem foi chamada de modelagem em microescala. Posteriormente, Tavares e King (1998) demonstraram que as partículas apresentam uma variabilidade das suas propriedades (resistência à fratura, tipo de fragmentação, etc.), reconhecendo a importância da descrição desse efeito na modelagem matemática. Embora o modelo conceitual proposto por King e Bourgeois nunca tenha sido efetivamente aplicado nem validado, o mesmo apresentava grande potencial de aplicação.

Posteriormente, após observações em laboratório de que as partículas quando submetidas a repetidos impactos vão acumulando dano na forma de trincas e, por consequência, se tornam mais suscetíveis à quebra, Tavares e King (2002) apresentaram um modelo baseado na mecânica do dano aplicado às partículas de minério que leva em conta este enfraquecimento causado por repetidos impactos. Esse modelo mecânico é bastante simples e necessita da calibração de apenas um parâmetro, apresentando resultados satisfatórios na descrição do enfraquecimento dos materiais.

A caracterização da quebra das partículas em microescala pode fazer com que a modelagem da cominuição em diferentes equipamentos convirja para um único modelo. Com o avanço do DEM em conjunto com a abordagem em microescala, combinada ao modelo de mecânica do dano, surge uma proposta de modelagem inovadora e poderosa, que, em tese, pode ser aplicada a qualquer tipo de processo de redução de tamanhos de partícula. Para isto basta conhecer a mecânica do equipamento estudado e as características do material que se deseja cominuir.

O presente trabalho propõe uma formulação inicial de um modelo matemático generalizado baseado no modelo do balanço populacional para os processos de cominuição. O modelo universal proposto desacopla os mecanismos predominantes nos processos de cominuição. Para a composição do modelo são utilizadas informações do espectro de energias de colisão fornecidas por simulações em DEM. A variabilidade das características de quebra das partículas de um material é considerada, sendo caracterizada pela distribuição de energias de fratura ou probabilidade de quebra. O modelo universal considera ainda o enfraquecimento das partículas quando submetidas a repetidos impactos, baseando-se no modelo de mecânica do dano proposto por Tavares e King (2002). Todo o embasamento teórico utilizado pelo modelo generalizado proposto lhe dá um caráter totalmente preditivo, com potencial para tornar-se uma excelente ferramenta com aplicação principalmente na etapa do projeto do circuito de cominuição. A fim de demonstrar o potencial do modelo, estudos de casos são apresentados para diferentes processos de cominuição, que vão desde a fragmentação inadvertida durante o manuseio e o transporte até a moagem em moinhos autógenos.

II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

II.1 - Visão Geral da Cominuição

Diversos tipos de equipamentos são empregados na cominuição de materiais. Cada um deles apresenta particularidades no que diz respeito aos mecanismos de aplicação de forças às partículas de minério, conforme mostrado na Figura II.1.

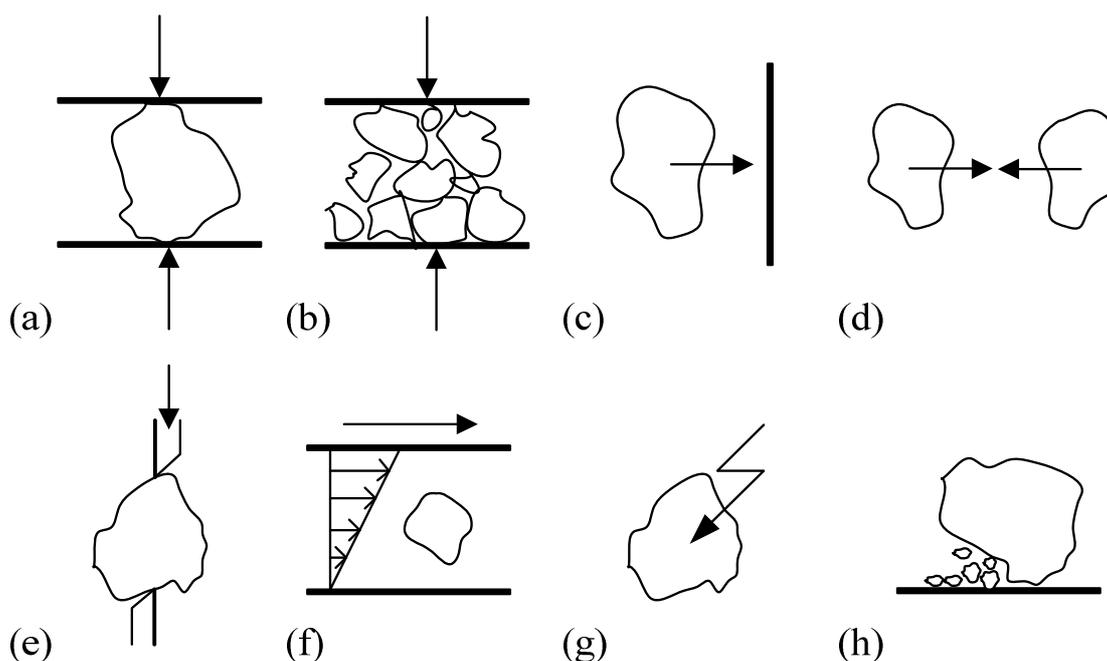


Figura II.1 - Métodos de aplicação de esforços em equipamentos de cominuição: aplicação de cargas diretamente entre duas superfícies sólidas a partículas individuais (a) e leitos de partículas (b); projeção de partículas contra uma superfície sólida (c) ou de partículas umas contra as outras (d); utilização de ferramentas de corte (e); aplicação de cisalhamento (f); aplicação de energia não-mecânica – como microondas, choques elétricos, calor, plasmas, etc (g) e quebra superficial devido à abrasão (h).

Os equipamentos utilizados na redução de tamanho de partículas de materiais lançam mão de diferentes mecanismos de aplicação de esforços na quebra das partículas. Quando uma partícula é grosseira (de maior tamanho), a energia necessária para fraturar cada partícula individual é normalmente alta, embora a energia por unidade de massa (ou volume) seja baixa. Conforme o tamanho de partícula se torna menor, a energia

específica (por unidade de massa) aumenta rapidamente. Isto explica a utilização de diferentes equipamentos de cominuição de acordo com o tamanho de partícula que se pretende reduzir. Na indústria mineral a grande maioria dos processos de cominuição utiliza moinhos rotativos. Estes moinhos podem ser de diversos tipos: bolas, barras, de seixos autógenos (AG) e semi-autógenos (SAG). A ação de moagem se dá por meio do movimento dos corpos moedores (bolas, barras, seixos ou cylpebs). Este movimento resulta em colisões que proporcionam a quebra por impacto ou por atrição (King, 2001).

Reduzir tamanho de partícula é um processo altamente custoso em termos energéticos. De acordo com o relatório da U.S. National Materials Advisory Board em 1981, 1,5% de toda energia elétrica produzida nos Estados Unidos fora consumida em operações de cominuição. Na Austrália um estudo recente estima que esse número seja da ordem de 14% (Walstra *et al.*, 2008). Estas estimativas contemplam também a energia necessária para fabricação dos corpos moedores de aço utilizados em moinhos. Em termos globais estima-se que as operações de cominuição consumam por volta de 3% de toda energia elétrica produzida no mundo (Schönert, 1986, Fuerstenau e Abouzeid, 2002).

A busca pelas condições ótimas de operação nos processos de cominuição sempre esteve em destaque. Historicamente, uma série de modelos matemáticos têm sido desenvolvidos como ferramenta para auxiliar esta tarefa (Carvalho, 2007).

Um modelo matemático é considerado como um imitador de um fenômeno natural ou uma construção artificial (Aris, 1993). Lançar mão de um modelo que seja o mais fiel possível ao processo ou sistema real é de grande importância, pois desta forma pode-se estudar o comportamento do processo sem, ou com a mínima, necessidade de estudos em laboratório, escala piloto ou industrial. Pode-se citar ainda, no caso da utilização de modelos dinâmicos, a possibilidade de se desenvolver, estudar e otimizar sistemas de controle para o processo (Carvalho *et al.*, 2007)

Um bom modelo de processo de cominuição deve representar como a energia aplicada sobre o material produzirá a sua quebra e como esta quebra se processará em termos de propriedades do material. Assim pode-se definir um modelo de cominuição (Napier-Munn *et al.*, 1996):

- Propriedades de quebra do material – essencialmente a quebra que ocorre como resultado da aplicação de esforços de uma dada quantidade de energia específica.
- Características do equipamento de cominuição – a quantidade e natureza da energia aplicada, e o transporte através da máquina.

A modelagem dos processos de cominuição sempre dependeu do poder computacional disponível para realizar os cálculos necessários. Antes da difusão dos computadores, os modelos relacionavam a energia aplicada ao grau de redução de tamanhos geralmente expressa por algum ponto da curva de distribuição granulométrica (d_{50} , d_{80} ou d_{90}) ou a proporção de produto final gerado no processo.

Os materiais processados nos circuitos de cominuição são caracterizados através da distribuição de tamanhos de partícula, a qual pode ser medida por meio de diferentes técnicas como o peneiramento, a difração de raios laser, a cicloclassificação, entre outras.

A distribuição de tamanhos pode ser representada, usando uma curva contínua ou de forma discreta por um conjunto de números $P(x)$ que representam cumulativamente a proporção de partículas menores que o tamanho x . A Figura II.2 exemplifica este tipo de representação.

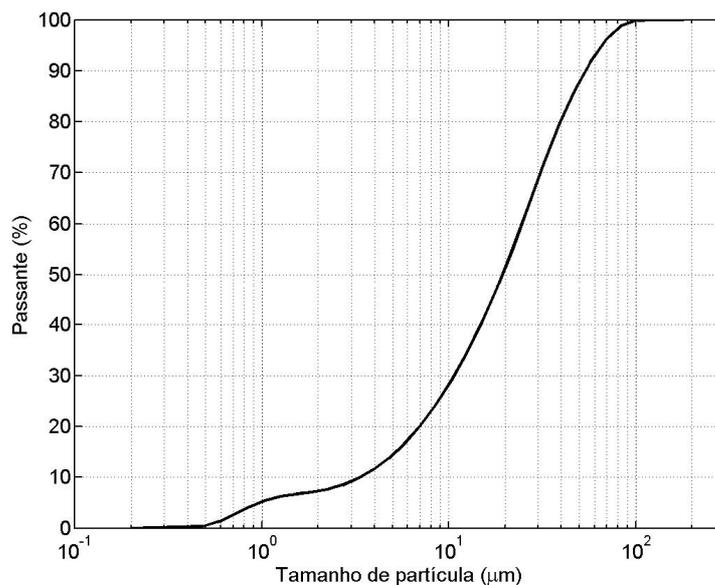


Figura II.2 - Análise granulométrica típica do produto final de um circuito de moagem de cimento portland (Carvalho, 2007).

II.2 - Histórico dos modelos matemáticos aplicados aos processos de cominuição

Para entender o momento atual vivido pelos pesquisadores e pela indústria no que diz respeito à modelagem matemática da cominuição, faz-se necessário revisar os principais avanços na área ao longo das últimas décadas.

II.2.1 - Modelos de primeira geração

Sabe-se que quanto menor o tamanho de partícula que se deseja quebrar, maior será a quantidade de energia necessária para proporcionar sua fratura. Baseado nesta observação de que há uma crescente demanda energética conforme a redução do tamanho de uma partícula se processa, considera-se uma energia incremental dE necessária para produzir uma mudança, dx , no tamanho, por exemplo, no P_{80} . Assim, pode-se relacionar estas variações através da equação,

$$\frac{dE}{dx} = - \frac{K_w}{x^n} \quad (\text{Eq. II.1})$$

A Equação II.1 sintetiza a idéia que surgiu através dos primeiros modelos matemáticos para cominuição. Estes modelos datam do final do século dezanove (King, 2001), como Rittinger e Kick.

Rittinger (1867) propôs que a energia consumida na redução de tamanho seria diretamente proporcional à área superficial criada. Kick (1885), por outro lado, propôs que a energia necessária para uma redução geométrica equivalente no tamanho de partícula seria constante. Embora sejam chamadas de primeira e segunda lei da cominuição estas proposições tinham fundamentações teóricas duvidosas e encontraram limitada aplicação em cominuição.

Muito trabalho foi realizado até a década de 50 para validar os postulados de Rittinger e Kick, até que Fred Bond desenvolveu um método de grande importância e que é utilizado até hoje na indústria mineral.

O método desenvolvido por Bond (1952, 1961) correlaciona um ensaio de moagem, realizado sob condições controladas, com o desempenho de um circuito de moagem

com moinhos de bolas e de barras em escala industrial de sua época (Powell e Morrison, 2007).

Seguindo o raciocínio envolvendo a Equação II.1, podem ser estimados valores para o expoente n para cada um dos três modelos. No modelo de Bond (1952), $n = 1,5$, originando a equação,

$$E = 2K_w \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1}} \right) \quad (\text{Eq. II.2})$$

sendo x_2 o tamanho do produto, x_1 o tamanho da alimentação e k uma constante.

A “Lei de Bond”, também conhecida como “terceira lei da cominuição”, foi proposta com base na hipótese de que a energia introduzida é proporcional ao novo comprimento da trinca de Griffith que resulta na fratura do material, sendo igual ao trabalho representado pelos produtos, subtraído do trabalho representado pela alimentação. Embora Bond tenha provado teoricamente sua proposta (Bond, 1952), atualmente é de consenso de que a Equação II.2 é, na realidade, uma relação empírica que fornece um ajuste razoável a experimentos de moagem.

Para os moinhos tubulares, o método de Bond fornece o valor de um parâmetro referente ao consumo energético específico do material processado. O índice de trabalho de Bond (Wi ou *Work Index*) é expresso em kWh/t e é definido como $Wi = 0,2K_w$ quando na Equação II.2, $x_2 = A_{80}$ e $x_1 = P_{80}$. O parâmetro P_{80} representa a classe de tamanho que possui 80 % das partículas passantes em uma abertura de peneira equivalente no produto e o A_{80} diz respeito ao tamanho referente ao valor de 80 % passante na alimentação. De posse do valor do Wi para um dado material, o consumo energético de um moinho industrial pode ser estimado pelo método de Bond com o auxílio de relações empíricas (Rowland e Kjos, 1978). A Equação II.2 então se torna,

$$Wi = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 Wi_D \quad (\text{Eq. II.3})$$

Nesta equação K_n s são parâmetros empíricos para correção do índice de trabalho obtido no ensaio padrão de Bond e ajustado para o diâmetro do moinho industrial

(Wi_D). Estes parâmetros levam em consideração certas condições operacionais como o tipo de circuito (aberto ou fechado), tipo de moagem (seco ou úmido), razão de redução dos tamanhos de partícula, características da granulometria da alimentação e características do produto.

No caso dos britadores, o índice de trabalho de Bond a ser considerado é relacionado ao índice de trabalho de impacto (Wi de impacto). No experimento que determina o valor deste índice, partículas são impactadas individualmente por um pêndulo duplo (Figura II.3).

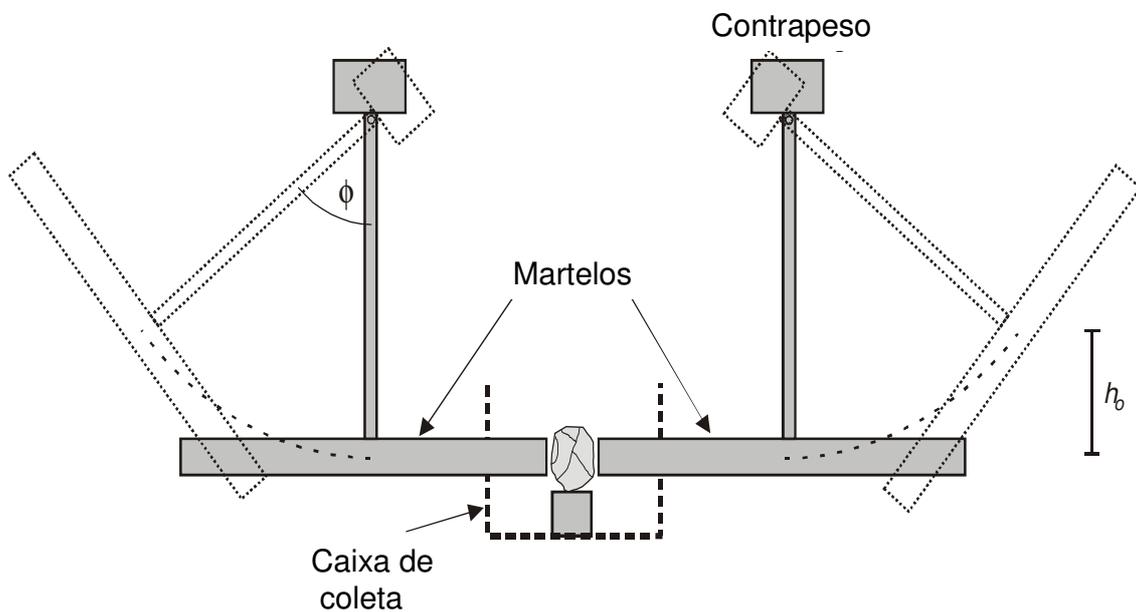


Figura II.3 - Aparato para determinação experimental do Wi de impacto (Tavares e Carvalho, 2007).

Bond propôs uma relação empírica para estimar o índice de trabalho de impacto a partir da razão entre energia de impacto aplicada e a espessura da partícula (Cb) e da massa específica do material ensaiado (ρ) (Equação II.4).

$$Wi_I = \frac{53,49Cb}{\rho} \quad (\text{Eq. II.4})$$

Os modelos considerados de primeira geração pouco contribuíram para o melhor entendimento dos mecanismos envolvidos na quebra de partículas, mas, eles foram

capazes de demonstrar a complexidade da quebra de materiais particulados e a necessidade de melhor entender seus aspectos fundamentais (Tavares, 1997).

Em geral, as três leis da cominuição apresentam uma grande limitação no que diz respeito ao tratamento energético. Isto se deve ao fato que, na prática a maior parte da energia empregada em uma operação de fragmentação é, na verdade, dissipada sob a forma de calor, de deformação plástica, etc, e não realiza qualquer trabalho útil. Sabe-se, por exemplo, que a energia consumida nestas operações é muitas vezes superior àquela efetivamente requerida para quebra das partículas (Schönert, 1986).

Apesar de sua simples execução e de ser amplamente utilizado, o modelo de Bond mostra sua grande deficiência ao ser aplicado em moinhos autógenos e semi-autógenos. Como o método é baseado em correlacionar a energia específica necessária para transformar uma alimentação grossa em produto fino no qual estes materiais apresentam granulometria seguindo a distribuição de Rosin-Rammler, qualquer distribuição de alimentação que não atenda estas características pode fornecer resultados irreais (Austin *et al.*, 1984), explicitando uma limitação do método/modelo. Mesmo assim o método de Bond fornece uma razoável estimativa de consumo energético de moinhos e britadores e é até hoje empregado como ferramenta no dimensionamento destes equipamentos na indústria. É sabido também que esta metodologia apresenta discrepâncias em torno de 20% do consumo energético real (Herbst e Fuerstenau, 1973), o que justifica sua utilização ainda hoje, mesmo já existindo ferramentais de modelagem mais modernos.

Dentro do contexto dos modelos de primeira geração, um cálculo importante a ser apresentado é o da potência consumida nos moinhos tubulares. Um modelo simples é descrito por King (2001), e de acordo com as definições mostradas na Figura II.4.

Pode-se definir a seguinte equação para o cálculo do torque (T) necessário para girar o moinho,

$$T = M_c g d_c + T_f \quad (\text{Eq. II.5})$$

na qual M_c é a massa total da carga do moinho e T_f é o torque necessário para superar o atrito. A potência do moinho P_m pode ser calculada a partir de,

$$P_m = 2\pi N_r T \quad (\text{Eq. II.6})$$

sendo N_r a frequência de rotações do moinho.

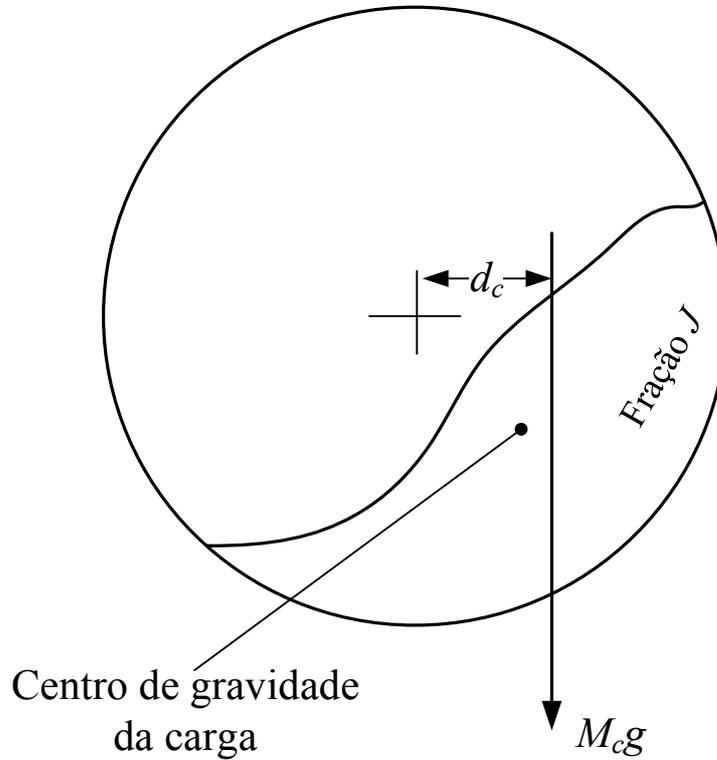


Figura II.4 - Ilustração do modelo simplificado para o cálculo do torque necessário para girar um moinho tubular (King, 2001).

Para moinhos de diferentes diâmetros que operam na mesma fração da velocidade crítica e que têm o mesmo grau de enchimento J , a potência líquida pode ser escrita em função de um parâmetro α_P constante:

$$P_{\text{liq.}} = 2\pi N_r M_c d_c \rightarrow P_{\text{liq.}} = \alpha_P N_c M_c d_c \rightarrow P_{\text{liq.}} = \alpha_P \frac{1}{D_m^{0,5}} L D_m^2 D_m \quad (\text{Eq. II.7})$$

por fim,

$$P_{\text{liq.}} = \alpha_P L D_m^{2,5} \quad (\text{Eq. II.8})$$

Sendo D_m o diâmetro interno do moinho e N_c a velocidade crítica do moinho. No ajuste da Equação II.8 a dados empíricos, expoentes de 2,3 a 3,0 em D_m são encontrados (King, 2001).

King (2001) reporta uma equação simples para o cálculo da potência líquida consumida pelo moinho, dada em kW,

$$P_{\text{líq. cons.}} = 2,0\varphi_c D_m^{2,5} L K_1 \quad (\text{Eq. II.9})$$

sendo φ_c a fração da velocidade crítica do moinho ($=N_r/N_c$). Na equação K_1 é o fator de carregamento que pode ser obtido de tabelas de manuais de fabricantes de moinhos populares, assumindo valores de 3 a 7 unidades dependendo principalmente do grau de enchimento do moinho e do tipo de operação (seco ou úmido) e do tipo de descarga (*overflow* ou grelha).

Alguns modelos mais precisos que relacionam a potência bruta e a potência líquida para estes tipos de moinhos foram propostos por Austin (1990) e o por Morrell (1996). A potência bruta é calculada pela soma da potência consumida pelo moinho girando sem carga e pela potência líquida consumida pela carga. A segunda pode ser calculada (em Watts) por,

$$P_{\text{líq. carga}} = K D_m^{2,5} L_e \rho_c \theta \zeta \quad (\text{Eq. II.10})$$

sendo L_e o comprimento efetivo do moinho incluindo o comprimento dos seguimentos cônicos. ρ_c é a massa específica da carga e θ e ζ são parâmetros correspondentes ao grau de enchimento e à velocidade de rotação respectivamente. K é uma constante de calibração que varia com o tipo de descarga. Austin e Morrell recomendam diferentes valores de K para cada condição. A Figura II.5 mostra uma ilustração de um corte longitudinal de um moinho tubular mostrando os parâmetros da equação.

A potência consumida pelo moinho vazio contempla todas as perdas mecânicas e por atrito no sistema de redução e pode ser calculado em (kW) de acordo com Morrell (1996),

$$P_{\text{vazio}} = 1.68 D_m^{2,05} [\varphi_c (0.667 L_d + L)]^{0,82} \quad (\text{Eq. II.11})$$

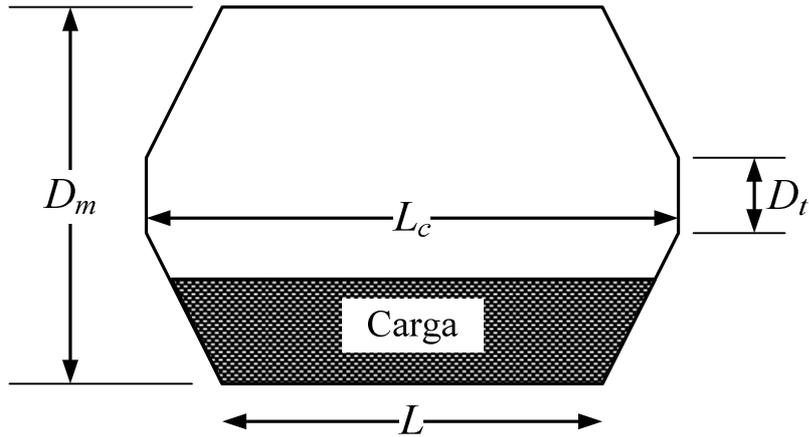


Figura II.5 - Ilustração da geometria de um moinho tubular.

L_d é o comprimento médio das extremidades cônicas do moinho e é calculada por,

$$L_d = \frac{L_c - L}{2} \quad (\text{Eq. II.12})$$

Austin e Morrell definem o comprimento efetivo do moinho L_e , que depende da carga, por diferentes funções que são, respectivamente,

$$L_e = L + \frac{0,092}{J_t(1-1,03J_t)} \frac{Ld}{\left(1 - \frac{D_t}{D}\right)} \left[\left(\frac{0,625}{0,5 - J_t}\right)^{0,1} - \left(\frac{0,625}{0,5 - J_t}\right)^{-4,0} \right] \quad (\text{Eq. II.13})$$

e

$$L_e = L + 2,28J_t(1 - J_t) \frac{Ld}{L} \quad (\text{Eq. II.14})$$

Nas quais J_t é o grau de enchimento total do moinho, composto da carga de bolas mais o material.

As funções α e δ segundo Austin são dadas por,

$$\theta = J_t(1 - 1,03J_t) \quad (\text{Eq. II.15})$$

e,

$$\xi = \varphi_c \left[1 - \frac{0.1}{2^{(9-10\varphi_c)}} \right] \quad (\text{Eq. II.16})$$

e segundo Morrell,

$$\theta = \frac{J_t(\psi - J_t)}{\psi^2} \quad (\text{Eq. II.17})$$

na qual,

$$\psi = 2(2,986\varphi_c - 2,213\varphi_c^2 - 0,4927) \quad (\text{Eq. II.18})$$

e,

$$\xi = \varphi_c [1 - (1 - \varphi_{max}) \exp(-19,42\varphi_{max} + 19,42\varphi_c)] \quad (\text{Eq. II.19})$$

onde,

$$\varphi_{max} = 0,954 - 0,135J_t \quad (\text{Eq. II.20})$$

Segundo King (2001), ambos os modelos produzem praticamente as mesmas estimativas de potência líquida consumida pelos moinhos. Tavares *et al.* (2009) compararam as metodologias para moinhos mais recentes, chegando à mesma conclusão de King.

II.2.2 - A segunda geração de modelos

Diante das limitações dos modelos matemáticos de primeira geração, alguns pesquisadores buscaram novas idéias para descrever os complexos mecanismos envolvidos nos processos de cominuição. Uma destas novas idéias surgiu com engenheiros químicos que descreveram moinhos como sendo um processo cinético tal qual uma reação química de primeira ordem, considerando o moinho como um reator de mistura perfeita e as partículas alimentadas são os reagentes e o material cominuído é o produto. Para ser utilizada na prática, esta hipótese necessitou de um modelo que levasse em conta o processo sobre populações (de partículas). Assim os pesquisadores lançaram mão de uma ferramenta já desenvolvida para problemas de engenharia

química e utilizada nos processos de quebra e aglomeração, chamada modelo balanço populacional (MBP).

A descrição estocástica dada pelo MBP permite levar em conta os microprocessos que ocorrem no interior de um equipamento de redução de tamanho de partícula (transporte, quebra e classificação) e descrevê-los matematicamente. No caso de modelos de moinhos, o modelo do balanço populacional é alimentado por equações que regem propriedades médias do material, como a taxa de quebra e a distribuição de quebra do material. Quando aplicado aos britadores o MBP se torna uma seqüência de eventos de classificação e quebra (Napier-Munn *et al.*, 1996) no qual também existe a necessidade da determinação destas funções, assim como nos modelos de moinhos. Para efeito de diferenciação, o modelo do balanço populacional classificado como de segunda geração neste trabalho será chamado de modelo do balanço populacional clássico.

A complexidade da cominuição, evidenciada pelos estudos anteriores a 1960, levou os pesquisadores da época à necessidade de se compreender a física e os mecanismos envolvidos na fratura de partículas. Assim, paralelamente ao MBP, difundiu-se a idéia de se caracterizar mecanisticamente a quebra. Diversos testes de fragmentação foram realizados sob condições controladas de aplicação de esforços, visando estudar o comportamento de deformação das partículas, a iniciação e propagação de falhas em sólidos e a geração de fragmentos. Porém a caracterização da fratura de partículas individuais encontrou limitações quanto à instrumentação necessária para medir algumas grandezas e inexistência de sensores e equipamentos capazes de medir as variáveis de interesse o que acabou ocasionando a estagnação de seu desenvolvimento.

Por outro lado, o MBP avançou e se tornou popular na indústria, sendo capaz de descrever via retro-cálculo a maioria dos processos de cominuição. O retro-cálculo, como o próprio nome indica, é uma metodologia de otimização dos parâmetros do processo a partir dos resultados experimentais das análises granulométricas das correntes do circuito. Alguns autores (Herbst e Rajamani, 1982 e Austin *et al.*, 1984) propuseram metodologias de escalonamento de moinhos tubulares baseadas no modelo do balanço populacional. A popularidade do MBP fez com que alguns grupos seguissem diferentes linhas de pensamento nos seus modelos de cominuição baseados no modelo do balanço populacional. Podem-se citar, Herbst e Fuerstenau (1980), Austin *et al.* (1984) e Whiten (1972).

Para um moinho de bolas, Herbst e Fuerstenau definem a taxa específica de quebra como função empírica da energia aplicada na moagem. Por outro lado, Austin define a cinética como função dos parâmetros operacionais e atribui à função de distribuição de quebra integralmente as características do material. Whiten, por sua vez, estabelece uma função quebra e agrega à cinética uma função de classificação deixando o modelo com mais graus de liberdade para o ajuste (sem compromisso com a cinética real do processo).

Durante a década de 80, com o avanço da capacidade de processamento dos computadores, surgiram simuladores comerciais de processos de cominuição, como é o caso do UsimPac, ModSim, JKSimMet, dentre outros. Estes simuladores são munidos de modelos que descrevem matematicamente as operações unitárias das usinas de processamento mineral. Os modelos dos processos de cominuição utilizados são aqueles baseados no MBP e estes simuladores também são capazes de estimar, via retro-cálculo, parâmetros destes modelos para o processo em estado estacionário com erros de 1 a 2% em relação ao processo (Herbst e Fuerstenau, 1980).

O avanço na compreensão das funções-núcleo (função quebra e função seleção) do modelo do balanço populacional possibilitou o estudo das plantas de cominuição de maneira dinâmica, fornecendo subsídios para o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos sistemas de controle. Um dos primeiros trabalhos envolvendo propostas de sistemas de controle (baseados em modelo) utilizando o modelo do balanço populacional foi aquele desenvolvido por Mishra (1991) e Mishra e Rajamani (1992), no qual uma estratégia de controle ótimo foi aplicada a um circuito de moagem operando a úmido.

O modelo do balanço populacional é baseado na caracterização de uma população através de uma distribuição de partículas no domínio de variáveis internas e externas, o que proporciona um procedimento de modelagem formalizado e poderoso. A idéia básica é a de que, conforme as partículas se movem através do sistema, suas coordenadas externas e internas variam: as coordenadas externas devido à movimentação física através do sistema e as internas devido às alterações proporcionadas pelo processamento.

O conjunto de coordenadas externas e internas relacionadas a uma partícula define a coordenada da localização no chamado espaço de fase. A coordenada externa descreve

sua localização física atual, enquanto que as coordenadas internas descrevem características próprias das partículas. As coordenadas internas devem ser suficientemente numerosas para descrever a partícula com todo o detalhamento necessário para sua completa caracterização em termos dos processos que precisam ser descritos (King, 2001).

Alguns exemplos de coordenadas internas são:

- Tamanho de partícula (provavelmente a mais trabalhada)
- Composição mineralógica
- Composição química
- Forma da partícula
- Energia superficial específica

De acordo com a aplicação específica do modelo do balanço populacional, pode-se escolher uma ou mais coordenadas internas adequadas. Assim, na modelagem da cominuição a coordenada interna que se torna mais relevante no modelo é o tamanho de partícula. A equação do balanço populacional fornece uma descrição muito poderosa das variações das características de populações de partículas em uma variedade de reatores, incluindo-se moinhos (Ramkrishna e Bornwanker, 1973). No caso da moagem ela tem sido usada com sucesso na descrição do processo, tanto na sua operação contínua quanto descontínua, e permite o desenvolvimento de modelos que descrevem a operação de vários tipos de moinhos e britadores.

Uma forma geral de se escrever a equação do balanço populacional é mostrada na Figura II.6. Esta é a descrição microscópica do processo, ou seja, as propriedades da população variam em cada segmento do espaço geométrico e também no tempo.

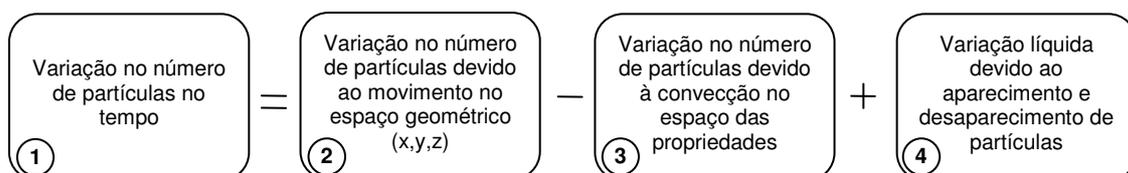


Figura II.6 - Esquema representativo do balanço populacional microscópico (Carvalho, 2007).

Para aplicar o MBP nos processos de moagem, é necessário entender a equação para o balanço microscópico:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} (V \bar{\Psi}) = \frac{1}{V} (Q_{in} \Psi_{in} - Q_{out} \Psi_{out}) - \sum_{j=1}^J \frac{\partial}{\partial \zeta_j} (v^{(j)} \bar{\Psi}) + \bar{D} - \bar{B} \quad (\text{Eq. II.21})$$

①
②
③
④

sendo V o volume de controle, $\bar{\Psi}$ a distribuição em número de partículas, $v^{(j)}$ o vetor de velocidade de mudança da propriedade j , Q_{in} e Q_{out} os fluxos de entrada e saída no volume de controle, respectivamente, e $\bar{D} - \bar{B}$ o termo de desaparecimento subtraído do termo de aparecimento. ζ_j é quantidade da propriedade j e t é o tempo.

• Modelagem de moinhos de bolas utilizando o MBP

Nos equipamentos de cominuição, por exemplo, como nos moinhos de bolas, a variação no tamanho de partículas ocorre predominantemente de forma catastrófica, como resultado dos impactos dos corpos moedores contra as partículas, causando sua fratura (termo 4 na Figura II.6). Neste caso despreza-se o efeito da variação contínua do tamanho de partícula (termo 3 na Figura II.6) que poderia ser causada, por exemplo, pelo processo de fragmentação por abrasão. Considerando estas hipóteses e tomando $\zeta_{i=1}$ referente ao tamanho de partícula, pode ser derivada a equação descritiva, em fração mássica, da moagem em moinhos de bolas (King, 2001), dada por

$$\frac{\partial [Mw(x,t)]}{\partial t} = W^{in}(t)w^{in}(t) - W^{out}(t)w^{out}(t) - s(x,t)Mw(x,t) + \int_x^{x_m} b(x,x')s(x',t)Mw(x',t)dx' \quad (\text{Eq. II.22})$$

sendo M a massa de sólidos no interior do moinho (denominada *hold-up*), $w^{in}(t)$ o vetor contendo a distribuição granulométrica do material na alimentação e $w^{out}(t)$ o vetor contendo a distribuição granulométrica na descarga do equipamento.

Na Equação II.22 a função s , chamada de função seleção, representa a taxa específica de quebra para partículas de tamanho x . A função $b(x,x')$, também chamada de função

quebra ou distribuição de quebra, representa a fração do produto da quebra primária proveniente de partículas do intervalo de tamanho x' que se distribuem no intervalo de tamanho x .

Para a caracterização das propriedades de quebra dos materiais (determinação das funções quebra e seleção) na moagem são freqüentemente utilizados ensaios de moagem descontínua em moinhos de laboratório. Neste caso considera-se o moinho como um reator de mistura perfeita e, como não há retirada nem alimentação de material ao moinho, desaparecem os efeitos de transferência de massa. Como, na prática, o tamanho de partícula é medido com o auxílio de peneiras (em intervalos discretos), convém descrever o tamanho de partícula em classes de tamanhos. Sendo assim o balanço populacional discretizado para um processo em batelada (sem aporte e descarga de material) é apresentado na Equação II.22, se torna,

$$\frac{dw_i}{dt} = -s_i w_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} s_j w_j \quad (\text{Eq. II.23})$$

Nesta forma, a população de fragmentos é discretizada em N classes de tamanhos. As partículas mais grossas são classificadas na classe de tamanho 1, enquanto as mais finas na classe de tamanhos N . Em outras palavras, $i=1$ se refere à primeira classe de tamanho de uma distribuição. A moagem do material na classe de tamanho i é caracterizada pelo desaparecimento de parte das partículas que pertencem à classe e pelo aparecimento de fragmentos menores, os quais são adicionados a classes mais finas.

Para o caso da primeira classe de tamanhos a Equação II.23 pode ser re-escrita como

$$\frac{dw_1(t)}{dt} = -s_1 w_1(t) \quad (\text{Eq. II.24})$$

sendo s_1 a taxa de quebra da classe de tamanhos 1. Esta equação resulta da hipótese de cinética de primeira ordem, ou seja, taxa de quebra constante, para a quebra por impacto no qual o modelo do balanço populacional linear é baseado. Este efeito é ilustrado na Figura II.7.

Austin, Klimpel e Luckie (1984) propuseram uma metodologia para determinar a taxa de quebra das partículas de material a partir de ensaios de moagem descontínua (Austin *et al.*, 1983) e resolvendo a Equação II.24 pode-se estimar a taxa específica de quebra s_1

$$\log \left[\frac{w_1(t)}{w_1(0)} \right] = -\frac{s_1}{2,3} t \quad (\text{Eq. II.25})$$

sendo que a razão $w_1(t)/w_1(0)$ representa a fração remanescente de partículas na classe 1 no moinho após um tempo t de moagem. A Figura II.7 apresenta a proporção remanescente de partículas no interior um moinho de bolas de laboratório o longo do tempo. Neste caso verifica-se que a hipótese de cinética de primeira ordem foi adequada e a taxa de quebra das partículas (s_1) é dada pelo coeficiente angular da reta (Eq. II.25).

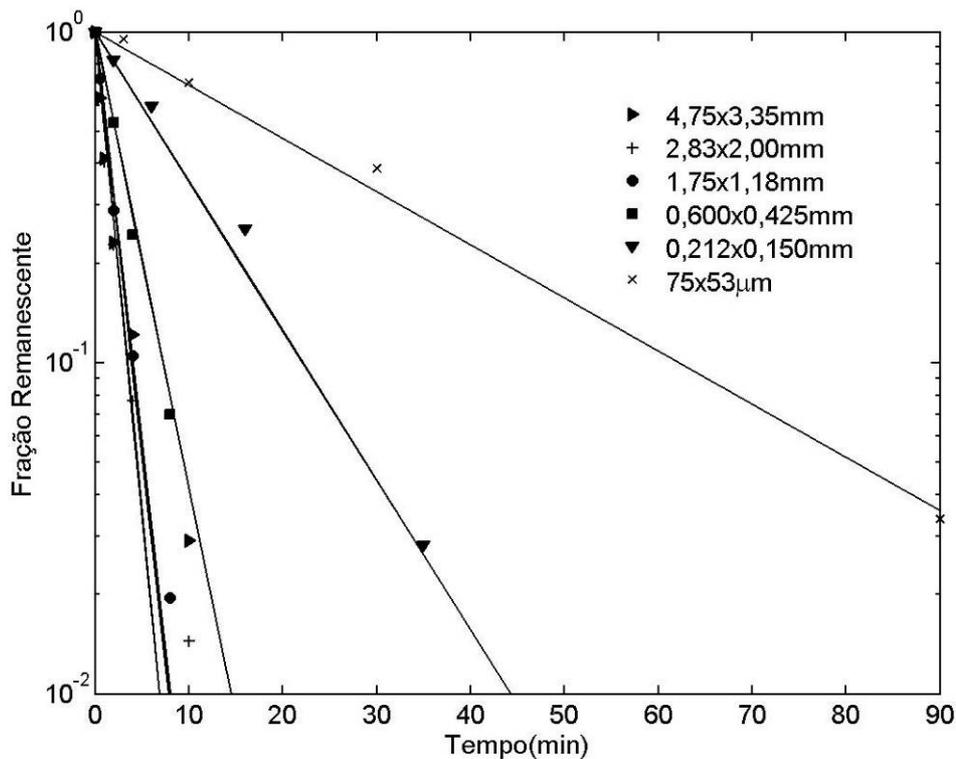


Figura II.7 - Proporção de partículas remanescentes ao longo do tempo e cinética de primeira ordem na moagem descontínua de minério de calcário (Tavares e Carvalho, 2009a).

Porém nem sempre a hipótese de quebra de primeira ordem é válida (Fuerstenau e Kapur, 2004, Bilgili e Scarlett, 2005, Tavares e Carvalho, 2009a). Há casos em que

durante o processo de moagem, a taxa de quebra pode desacelerar ou acelerar dependendo de certas condições operacionais e do tipo de material processado. Isso é ilustrado na da Figura II.8, que mostra efeitos de ordem maior que um na taxa de quebra resultantes de um ensaio em escala de laboratório de moagem em batelada de um calcário para três mono-tamanhos diferentes. A evidência de comportamentos de ordem maiores que um na cominuição deixa claro um dos pontos fracos do modelo do balanço populacional convencional.

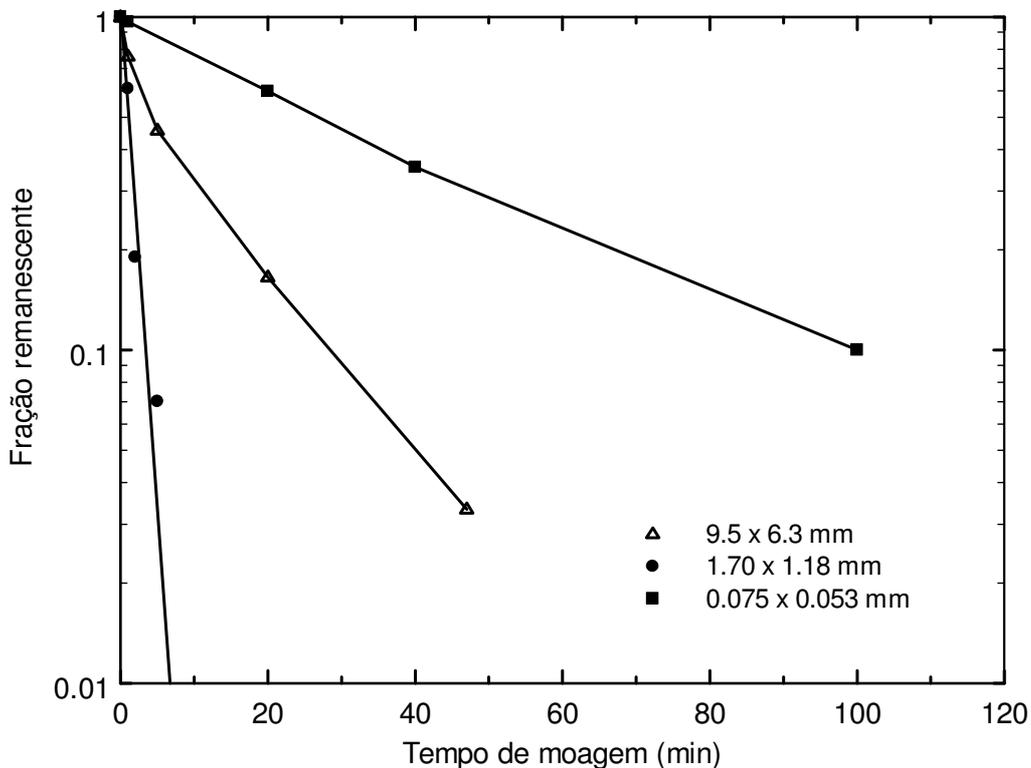


Figura II.8 - Taxas de quebra de ordem diferentes de um.

• Modelagem de britadores utilizando o MBP

Os processos de britagem descritos pelo modelo do balanço populacional levam em conta ciclos de quebra e classificação (Napier-Munn *et al.*, 1996). A natureza do processo de britagem em britadores por compressão é periódica e cada período consiste de uma ação de esmagamento seguida de uma ação de abertura. Durante a abertura parte do material no ciclo se desloca para baixo e algum material escapa do britador enquanto

que uma certa quantidade de alimentação fresca entra no equipamento. O ciclo pode ser representado pelo esquema da Figura II.9.

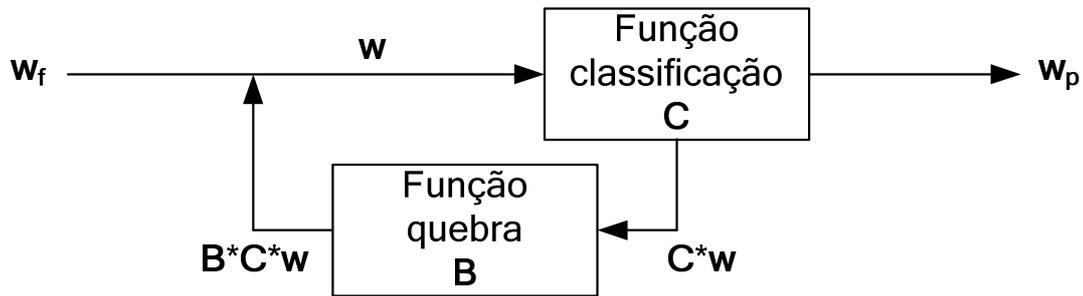


Figura II.9 - Representação esquemática do modelo de britagem (Napier-Munn *et al.*, 1996).

O esquema apresentado (Figura II.9) representa o modelo do balanço populacional para um britador escrito na forma matricial. As funções classificação e quebra são matrizes que definem como o processo transcorrerá. Comparando com as funções utilizadas na modelagem dos moinhos, a função quebra possui a mesma forma funcional. Por outro lado a função classificação engloba as funções seleção e descarga e representa a proporção de partículas que continua no processo para sofrer novos ciclos de quebra.

A solução matricial do modelo de britagem pode ser obtida realizando balanços de massas em cada nó do esquema. Desta forma a equação que descreve o produto final do processo é (Napier-Munn *et al.*, 1996),

$$\mathbf{w}_p = (\mathbf{I} - \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{BC})^{-1} \mathbf{w}_f \quad (\text{Eq. II.26})$$

sendo \mathbf{w}_p o vetor de frações mássicas do produto, \mathbf{I} a matriz identidade, \mathbf{B} a função quebra na forma matricial, \mathbf{C} a função classificação e \mathbf{w}_f o vetor de frações mássicas da alimentação.

A função classificação é totalmente empírica, podendo ser adequadamente descrita pelas expressões (Whiten, 1972),

$$C(x) = 0 \quad \text{para } x < K1$$

$$C(x) = 1 - \left[\frac{K2 - x}{K2 - K1} \right]^{K3} \quad \text{para } K1 < x < K2 \quad (\text{Eq. II.27})$$

$$C(x) = 1 \quad \text{para } x > K2$$

sendo $K1$ o tamanho abaixo do qual as partículas são reportadas diretamente ao produto, $K2$ o tamanho acima do qual todas as partículas são selecionadas para quebra, $K3$ a forma da função classificação para as partículas de tamanho intermediário e x o tamanho de partícula.

A utilização do modelo de britadores para prever a distribuição granulométrica do produto, requer valores adequados para os parâmetros $K1$, $K2$ e $K3$. Já os parâmetros $K1$ e $K2$ são influenciados pelas configurações mecânicas do britador, por variáveis do processo como a taxa de alimentação e granulometria do material. Por meio de amostragens em um grande número de britadores e posteriormente ajustando os dados por uma regressão, alguns autores estabeleceram uma relação para obtenção dos parâmetros $K1$ e $K2$ (Andersen, 1988, Andersen e Napier-Munn, 1990):

$$K1 = A_0 + A_1CSS - A_2W_f + A_3A_{80} + A_4L_{len} \quad (\text{Eq. II.28})$$

$$K2 = B_0 \pm B_1CSS + B_2W_f + B_3A_{80} - B_4L_{len} + B_5E_t \quad (\text{Eq. II.29})$$

sendo A_n e B_n parâmetros de ajuste, CSS a abertura de posição fechada, W_f a taxa de alimentação de sólidos, A_{80} o tamanho que possui 80 % passante da alimentação, L_{len} o comprimento da face do revestimento, L_{hr} a idade do revestimento e E_t o deslocamento do excêntrico do britador.

Ainda assim o modelo do balanço populacional é utilizado para ajustar e prever o produto de processos de cominuição em escala industrial. As hipóteses consideradas para sua implementação (cinética de primeira ordem e propriedades das partículas constantes e médias) muitas vezes invalidam ou prejudicam a aplicação do modelo do balanço populacional para certos materiais e condições operacionais em moinhos e britadores. Diversos autores tentaram estabelecer relações empíricas para entender a influência do ambiente de moagem. O problema é que no modelo do balanço populacional tal qual foi proposto não se consegue separar os efeitos de características

do material processado das características do meio de moagem. Um exemplo disto é a taxa de quebra de partículas que é dada como função de características do material e de variáveis operacionais, como velocidade de rotação do moinho, grau de enchimento, ambiente de moagem (seco ou úmido), etc.

Pode-se afirmar que o modelo do balanço populacional é apenas tão bom quanto os modelos que o compõem. Cada aplicação do MBP necessita de modelos que o complementem, como por exemplo, um modelo de transporte de partículas ou de classificação interna de moinhos. Este tipo de limitação evidencia a importância da compreensão dos fenômenos físicos que fazem parte de cada processo de cominuição. Este pensamento foi o que levou os pesquisadores a um novo nível de modelos para a cominuição.

- **A função quebra**

A função quebra é de extrema importância na quantificação do produto da quebra dos materiais nos processos de cominuição. A função quebra é a função que descreve como a massa é distribuída nos fragmentos gerados no produto da quebra de partículas em um único evento de quebra (fratura primária) (Figura II.10). Nos processos de cominuição, o produto gerado pode ser calculado da aplicação da função quebra sucessivas vezes. Pode-se pensar, portanto, nos processos de cominuição como sendo processos que podem ser modelados matematicamente considerando uma sucessão de impactos individuais de forma a gerar um produto. Assim, o conceito de função quebra veio a ser aplicado juntamente aos modelos de segunda geração que são baseados no modelo do balanço populacional.

Diversos aparatos e ensaios foram elaborados e propostos para realizar a determinação da função quebra de materiais, sendo o mais simples deles o ensaio de queda de peso ou DWT (*Drop Weight Test*). Neste ensaio partículas são impactadas individualmente por um peso (corpo moedor esférico ou uma bigorna) a partir de uma altura conhecida. Em seguida, todos os fragmentos são recolhidos para determinação da análise granulométrica. A Figura II.11 apresenta uma ilustração do ensaio de queda de peso.

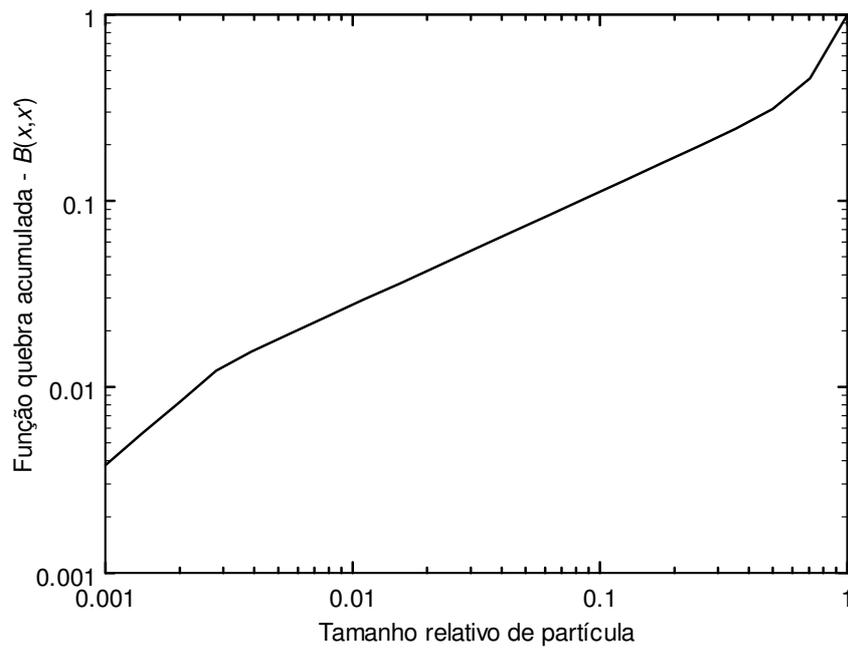


Figura II.10 - Exemplo típico de função quebra.

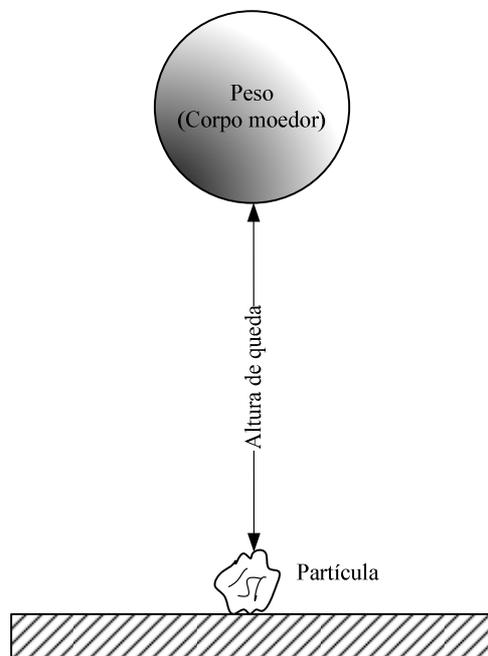


Figura II.11 - Esquema representativo do ensaio de queda de peso (DWT – *Drop Weight Test*) utilizado na determinação da função quebra dos materiais (King, 2001).

No ensaio do DWT, variando-se a altura de queda do peso é possível submeter partículas a diferentes energias de impacto, de maneira a tornar possível correlacionar o nível de quebra com a energia aplicada. É totalmente plausível afirmar que quanto maior a energia aplicada maior será o nível de quebra, podendo ocorrer um maior número de eventos sequenciais de quebra.

Segundo King, muitas tentativas surgiram com o objetivo de modelar a forma da função $B(x, x')$ (forma acumulada de $b(x, x')$) para cada tipo de quebra, porém nenhum modelo teórico que reproduza os dados obtidos do ensaio de quebra individual de partículas foi encontrado. Entretanto, alguns modelos empíricos conseguem prover uma boa descrição dos dados experimentais.

Um dos modelos mais difundidos (Austin *et al.*, 1984) é baseado na hipótese de que os fragmentos de quebra são compostos por duas populações de partículas, conforme o exemplo de quebra mostrado na Figura II.12.

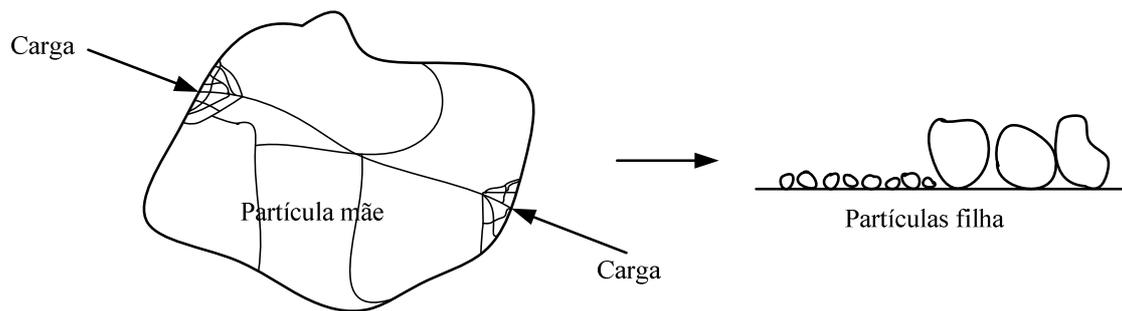


Figura II.12 - Geração de partículas a partir da quebra por clivagem de uma partícula mãe (original).

Cada uma destas populações possui uma forma funcional do tipo,

$$B(x, x') \text{ é proporcional a } \left(\frac{x}{x'}\right)^n \quad (\text{Eq. II.30})$$

Sendo que diferentes valores de n podem corresponder aos esforços ocasionando fratura por impacto ou por forças compressivas nos pontos de aplicação de esforços. A equação, então, é dada por,

$$B(x,x') = \Phi\left(\frac{x}{x'}\right)^{m_1} + (1-\Phi)\left(\frac{x}{x'}\right)^{m_2} \quad (\text{Eq. II.31})$$

O primeiro termo na Equação II.31 descreve a distribuição de tamanhos da fração fina originada na quebra e o parâmetro Φ é a fração do produto da quebra que contribui para a fração fina. Este modelo de função quebra é utilizado na abordagem dos processos utilizados por Austin *et al.*(1984).

Outro tipo de modelo empírico para a função quebra é aquele que correlaciona a quebra com a energia aplicada. Analisando dados de quebra de partículas individuais para diferentes energias, é possível observar que quanto maior a energia aplicada mais intensa é a quebra e, portanto, maior a geração de partículas mais finas. Um exemplo é apresentado na Figura II.13 que mostra a análise granulométrica do produto do ensaio de queda de peso sobre partículas individuais (DWT) para diferentes energias de impacto.

Cada análise granulométrica do produto da quebra pode ser parametrizada em função dos chamados parâmetros t_n (Narayanan e Whiten, 1988). O parâmetro t_n é a porcentagem de material passante na abertura de peneira equivalente ao tamanho original da partícula dividido pelo índice n de modo que,

$$t_n = P\left(\frac{d_0}{n}\right) \quad (\text{Eq. II.32})$$

na qual d_0 é o tamanho original da partícula e $P(d)$ é a distribuição de tamanhos de partícula na forma acumulada.

O mais importante dos parâmetros t é o parâmetro t_{10} que diz respeito à porcentagem de material gerado na quebra que é menor que um décimo do tamanho de partícula original. Uma maneira de correlacionar a energia de impacto empregada na quebra (E) com a quantidade de quebra gerada é utilizando o parâmetro t_{10} . A Figura II.14 mostra os dados experimentais para o mesmo ensaio da Figura II.13 na forma de $t_{10} \times E$ (Napier-Munn *et al.*, 1996),

$$t_{10} = A(1 - e^{-bE}) \quad (\text{Eq. II.33})$$

na qual A e b são parâmetros de ajuste do modelo e variam em função do material.

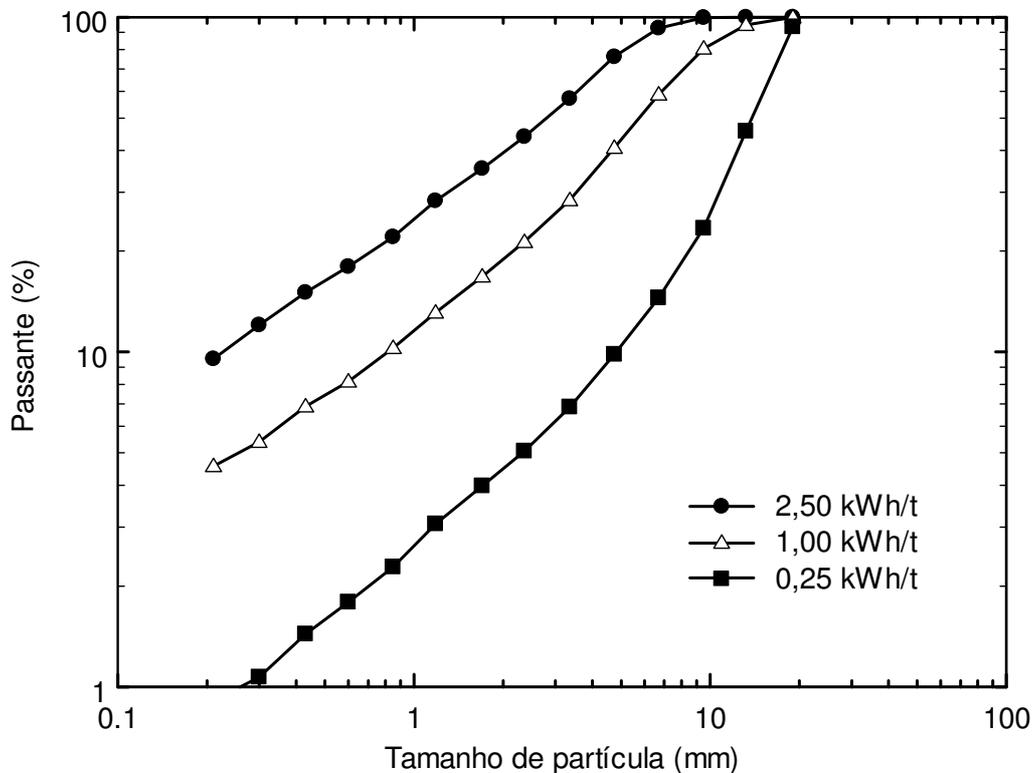


Figura II.13 - Produto do ensaio de DWT de minério de cobre no tamanho original de 22,4 x 19,2 mm para diferentes energias específicas de impacto.

Se, por um lado, a relação $t_{10} \times E$ descreve o efeito da energia na quebra, ela sozinha não fornece toda a função quebra. Então foi proposta uma correlação entre o parâmetro t_{10} e os demais parâmetros t_n s de modo a descrever cada análise granulométrica nestas coordenadas de tamanho (d_0/n) específicas. Desta forma, é possível representar as mesmas análises granulométricas da Figura II.13 na forma do gráfico chamado $t_{10} \times t_n$ s conforme a Figura II.15.

É de praxe utilizar um conjunto de polinômios do tipo splines cúbicas para interpolar os dados de cada curva $t_{10} \times t_n$ (Napier-Munn *et al.*, 1996), o que se torna bastante prático. O conjunto dos pontos da interpolação é denominado *appearance function* e é normalmente considerado independente das características de quebra do minério. No procedimento adotado pelo Julius Kruttschmitt Mineral Research Centre (JKMRC), da

interpolação obtida por splines cúbicas para cada t_n , são extraídos os valores t_n s para alguns t_{10} selecionados conforme mostrado na Tabela II.1,

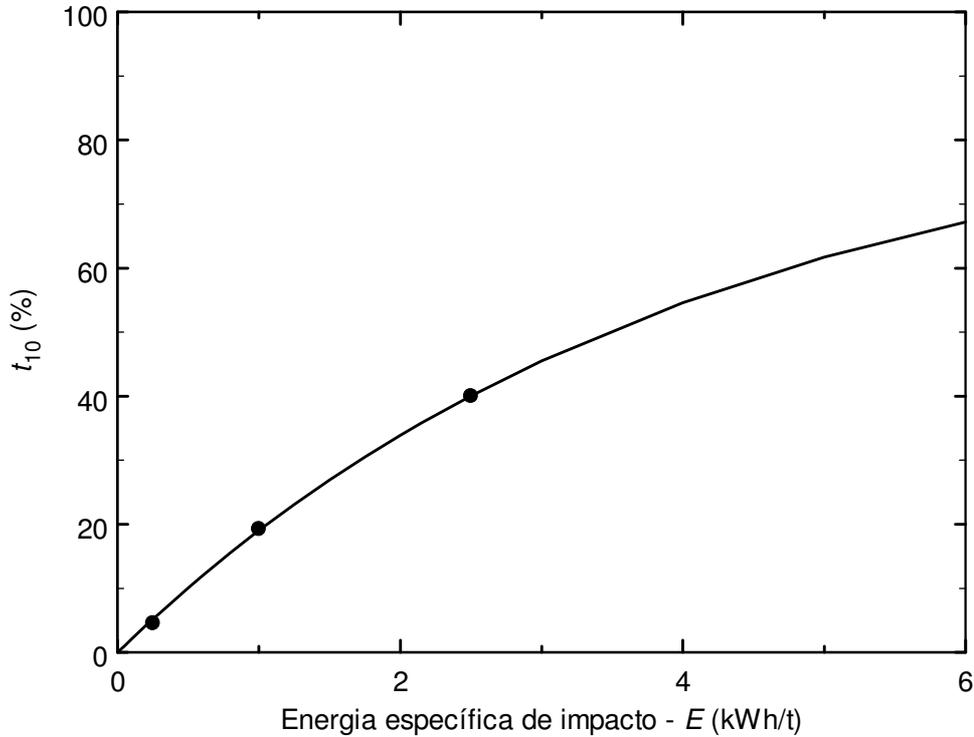


Figura II.14 - Relação entre o t_{10} e a energia específica de impacto (E) utilizada na quebra de partículas de minério de cobre no ensaio DWT. Pontos são os resultados experimentais e a linha são os dados calculados pelo modelo da Equação II.33 para $A=87,0$ e $b=0,247$.

Tabela II.1 - *Appearance function* para o minério de cobre da Figura II.13

t_{10}	Tamanho relativo ao tamanho inicial				
	t_2	t_4	t_{25}	t_{50}	t_{75}
	Passante acumulado (%)				
10	92,4	78,5	56,6	24,7	5,2
20	98,6	95,9	85,0	47,8	10,4
30	99,8	99,4	95,7	66,1	15,9
50	100,0	100,0	99,8	89,0	27,9

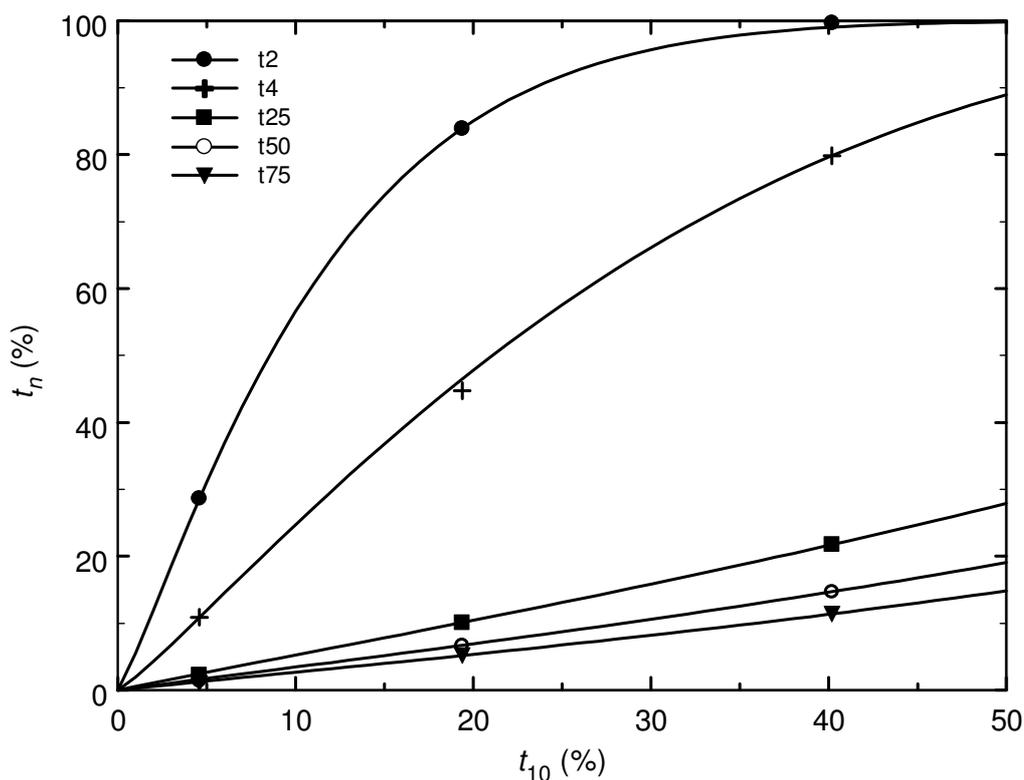


Figura II.15 - Dados de t_{10} contra t_n s para o resultado de DWT de minério de cobre apresentado na Figura II.13 (pontos), e curvas simuladas (linhas sólidas) utilizando o modelo da função beta incompleta.

Cada linha vertical, traçada a partir de determinado valor de t_{10} permite reconstruir uma análise granulométrica completa, expressa em termos de porcentagem passante acumulado. Para um determinado minério pode-se realizar diversos experimentos de impacto de maneira que seja possível ajustar uma função para cada grupo de pontos $t_{10} \times t_n$.

Diante desta situação pesquisadores do Utah Comminution Center, buscaram funções matemáticas do tipo, $t_n=f(t_{10})$ para descrever a *appearance function*. Milin (1994) sugeriu utilizar a função beta incompleta, pois esta é capaz de descrever cada curva $t_{10} \times t_n$ de maneira adequada, necessitando apenas de dois parâmetros de ajuste (α e β) para cada $t_{10} \times t_n$. A forma funcional da função beta incompleta já descrita em função de t_{10} é,

$$t_n(t_{10}, \alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{\int_0^1 y^{\alpha_n-1} (1-y)^{\beta_n-1} dy} \int_0^{t_{10}} y^{\alpha_n-1} (1-y)^{\beta_n-1} dy \quad (\text{Eq. II.34})$$

A função beta é uma função monotônica crescente no domínio [0,1] sendo portanto bastante adequada para ajustar os conjuntos de dados de t_{10} . O conjunto de parâmetros α_n e β_n é função do material e pode ser determinado a partir das curvas experimentais de $t_{10} \times t_n$ geradas no ensaio de DWT. A Tabela II.2 lista o conjunto de parâmetros α_n e β_n estimados para o caso do minério de cobre apresentado na Figura II.13.

A construção da função quebra na forma matricial (b_{ij}) a partir do conjunto de dados de $t_{10} \times t_n$ é feita a partir do gráfico cuja abscissa é o tamanho de partícula. A partir disso são identificados os tamanhos de partícula que são equivalentes à (d_0/n) , para cada $d_0=d_j$, a partir deste mapeamento são determinados os pontos equivalentes à cada classe i no vetor de tamanhos de partícula d .

Tabela II.2 – Parâmetros α_n e β_n para o minério de cobre apresentado (Figura II.13)

n	α_n	β_n
2	1,19	9,73
4	1,15	3,47
25	0,95	0,44
50	0,94	0,28
75	0,94	0,21

II.2.3 - Modelos de terceira geração

Diante das limitações do modelo do balanço populacional convencional alguns pesquisadores buscaram seu aprimoramento, dentre eles pode-se citar o trabalho de Cho (1987) que realizou um dos primeiros estudos sobre a fragmentação de partículas em leitos, quando estas são impactadas por uma esfera de aço tal qual ocorre no interior de moinhos de bolas. No MBP clássico, as funções quebra e seleção fornecem uma descrição média de todos os eventos que ocorrem no interior dos moinhos. A partir desta hipótese, Cho propôs a caracterização destas funções como uma ponderação em

função da magnitude e da frequência das energias de impacto no interior de um moinho de bolas.

Cho realizou ensaios de impacto sobre leitos de partículas que consistiam na queda livre de uma esfera de aço a alturas determinadas. A esfera era lançada sobre um leito de partículas simulando condições encontradas nos moinhos de bolas. Este ensaio permitiu calcular a função de distribuição de quebra para diversas energias de impacto.

No estudo de Cho para moinhos de bolas, assumiu-se que cada nível de energias de impacto possui uma função de distribuição de quebra equivalente. A função quebra efetiva do moinho de bolas é a soma de todas as funções quebras obtidas para cada nível energético (Equação II.35), ou seja,

$$B_M(p) = \sum_e f(e') B_d(e', p) \quad (\text{Eq. II.35})$$

sendo, B_M a função quebra para o moinho de bolas na forma acumulada, $f(e')$ a fração do e' -ésimo nível energético no espectro de energias de impacto no moinho de bolas e $B_d(e', p)$ a função quebra obtida via ensaios de impacto em leitos de partícula.

O mesmo raciocínio foi aplicado para a função seleção. Considerando o modelo do balanço populacional para um moinho de bolas descontínuo, a Equação II.25 pode ser re-escrita como função das energias de impacto:

$$w_1(\bar{E}) = w_1(0) \exp(-s_1^E \cdot \bar{E}) \quad (\text{Eq. II.36})$$

Esta equação é a solução fornecida para o modelo do balanço populacional para a classe de tamanho 1 quando re-escrita em termos da energia específica aplicada (\bar{E}) ao invés do tempo (como na Equação II.25). A energia específica aplicada pode ser escrita como,

$$\bar{E} = \sum_e \frac{f(e') E(e)}{w_1^e} \quad (\text{Eq. II.37})$$

sendo $E(e)$ a energia associada ao índice do nível energético e' e w_1^e a fração mássica da classe 1 que efetivamente quebra devido a aplicação da energia $E(e')$. Substituindo \bar{E} na Equação II.25,

$$w_1(\bar{E}) = w_1(0) \exp\left(-s_1^E \sum_e \frac{f(e)E(e)}{w_1^e}\right) \quad (\text{Eq. II.38})$$

A limitação desta abordagem está associada ao fato que o espectro de energias de impacto em um moinho não pode ser facilmente medido. Höfler e Herbst (1990) contornaram esta limitação, estimando o espectro de energias de impacto por retro-cálculo a partir de dados de entrada e saída do modelo. Desta maneira, eles conseguiram prever a distribuição de tamanhos do produto de um moinho de bolas de 25 cm de diâmetro. No entanto, em 1991, Mishra realizou o primeiro cálculo do espectro de energias de impacto para um moinho de bolas por meio dos elementos discretos, conforme será discutido mais adiante.

Idéias semelhantes a essa também foram propostas para os britadores. Evertsson e Bearman (1997) sugerem uma função quebra na britagem semelhante àquela proposta por Cho, combinando funções quebra dependentes do mecanismo de aplicação e magnitude da energia. A função quebra foi determinada a partir de ensaios de compressão sob condições controladas em laboratório. As partículas foram dispostas em leito visando reproduzir o mecanismo de aplicação de energia dos britadores cônicos. Desta forma os efeitos da mecânica do britador foram desacoplados das características das partículas. O modelo proposto por Evertsson e Bearman, assim como a abordagem de Cho, se mostrou bastante promissor, porém encontra dificuldade na modelagem mecânica contínua para cada tipo de britador. Ainda assim, este estudo representa um passo adiante em relação à modelagem clássica de britadores, como aquela proposta por Whiten (1984) que modela todo o funcionamento do britador através de uma única região de britagem com eventos de seleção e quebra, e em seguida, ajusta o modelo para o processo em escala industrial sem desacoplamento das propriedades mecânicas do britador e das partículas. Embora possa representar uma boa ferramenta de ajuste e otimização, modelos como este não são diretamente aplicáveis como ferramentas de projeto.

No contexto do desacoplamento dos efeitos e da evidente importância de se considerar os efeitos do ambiente de moagem na forma do espectro de energias de impacto, King e Bourgeois (1993) apresentaram um novo modelo conceitual para os moinhos de bolas. A função distribuição de quebra do modelo é descrita por,

$$b_p(x, x') = M \int_0^{\infty} w(x, x'; eE) P(E) dE \quad (\text{Eq. II.39})$$

sendo, $P(E)$ a função de densidade de probabilidades das energias de impacto no moinho, $w(x, x'; eE)$ a massa de partículas menores que o tamanho x que são criadas a partir da quebra das partículas de tamanho x' quando submetidas a um impacto de energia E . King e Bourgeois (1993) estimaram a proporção da energia de impacto absorvida pelas partículas em um leito (parâmetro e) a partir de um modelo de fratura de partículas individuais.

Além do ressurgimento da abordagem em microescala, a década de 90 presenciou a difusão da aplicação do método dos elementos discretos (DEM – *Discrete Element Method*) na moagem. O DEM modela o movimento de partículas e corpos moedores no interior dos moinhos. Os primeiros trabalhos aplicando esta metodologia aos equipamentos de cominuição surgiram no início da década de 90 com Mishra (1991) e Mishra e Rajamani (1992).

Conforme visto nos trabalhos desenvolvidos por Cho, King e Bourgeois, Evertsson e Bearman, é facilmente reconhecida a necessidade de compreender como a energia mecânica é distribuída nos corpos moedores ou revestimentos de um britador. A princípio, pode-se pensar na utilização de sensores no interior dos moinhos para medir o nível energético (Napier-Munn *et al.*, 1996). Porém isto não é viável, tendo em vista que o interior de um moinho é um ambiente extremamente agressivo e nenhum sensor resiste facilmente às colisões presentes no meio. Um exemplo disto são os impactos proporcionados pela queda livre de esferas de aço da ordem de 10 metros de altura como no caso de moinhos semi-autógenos. Sendo assim, uma maneira de se estimar como a energia é distribuída nos meios de moagem é através do estudo do movimento da carga, compreendida pelo material (minério) e corpos moedores.

O método dos elementos discretos permite modelar o movimento dos sólidos utilizando as equações do movimento dos corpos. O DEM é uma ferramenta poderosa, que torna possível monitorar e detalhar os choques individuais entre as partículas e as bolas (no caso de moinhos de bolas) ou até mesmo visualizar e mensurar os esforços realizados sobre as partículas que estão no interior de uma câmara de britagem (Figura II.17a).

Ainda no caso de moinhos, o DEM pode ser utilizado para prever como a carga se comporta de acordo com parâmetros de projeto e operacionais, como o grau de enchimento, tipo de barras elevadoras, velocidade de rotação, etc. (Figura II.16). O DEM pode ainda ser útil no projeto de equipamentos de transporte de minérios, como correias transportadoras (Figura II.17b).

O DEM permite ainda prever a eficiência energética e pode também ser utilizado no dimensionamento dos equipamentos. No contexto de modelagem matemática, a principal vantagem do DEM é fornecer o histórico e magnitude das colisões que ocorrem no ambiente de quebra durante um intervalo de tempo, traduzido pelo espectro de energias de impacto (Figura II.18).

O estudo das propriedades elásticas de materiais granulares tem sido abordado por muitos autores desde os trabalhos pioneiros de Mindlin na década de 50 (Mindlin, 1949). Desde então, a simulação do movimento de corpos em tambores rotativos com o DEM em três dimensões foi implementada por diversos autores. Na abordagem mais comum as partículas sólidas são capazes de se sobrepor e a magnitude da sobreposição Δs e as velocidades relativas, normal e tangencial, determinam as forças de colisão. Existe uma série de modelos para a força de contato que aproximam a dinâmica das colisões para várias abordagens. Normalmente, na modelagem de moinhos, utiliza-se o modelo de contato linear mola-amortecedor para descrever o processo de colisões entre partículas do meio simulado. Recentemente com o aumento da capacidade de processamento dos computadores tornou-se possível utilizar um modelo de contato mais realista que é o modelo de contato de Hertz-Mindlin, que está implementado em softwares comerciais como o EDEM[®] (Dem Solutions, 2008).

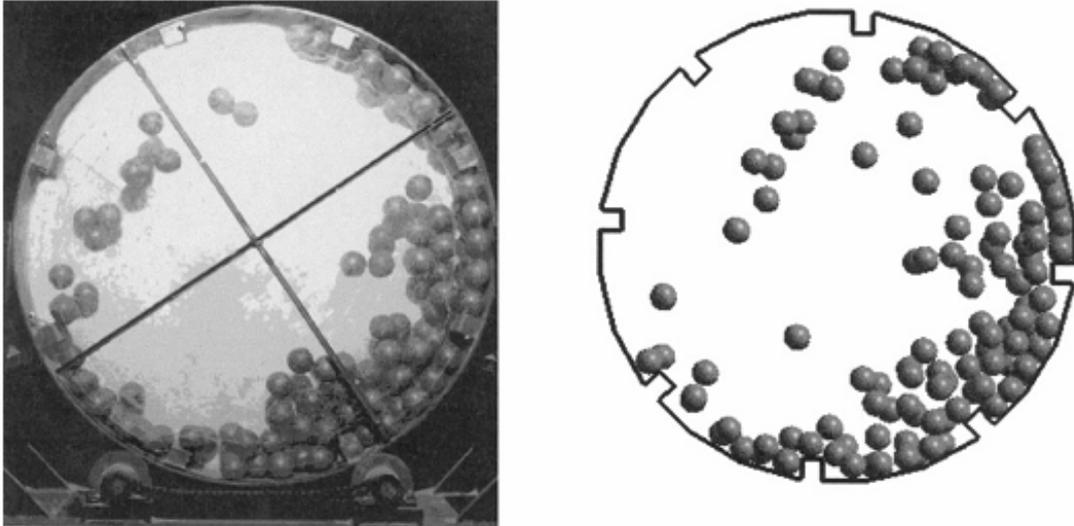


Figura II.16 - Comparação do movimento da carga em um moinho de bolas operando a 70 % da velocidade crítica com enchimento de 20 % de laboratório com a simulação por DEM (Rajamani *et al.*, 2000).

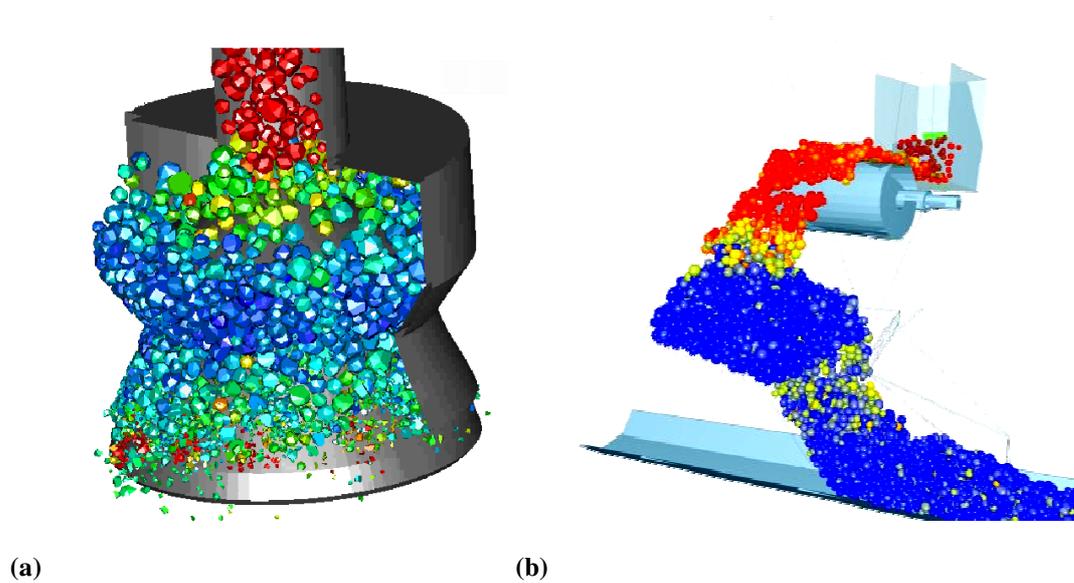


Figura II.17 - Simulações obtidas por DEM (a) britador cônico de laboratório B90 (Lichter *et al.*, 2009) (b) transporte e manuseio de partículas no beneficiamento de carvão (EDEM[®] – www.demsolutions.com).

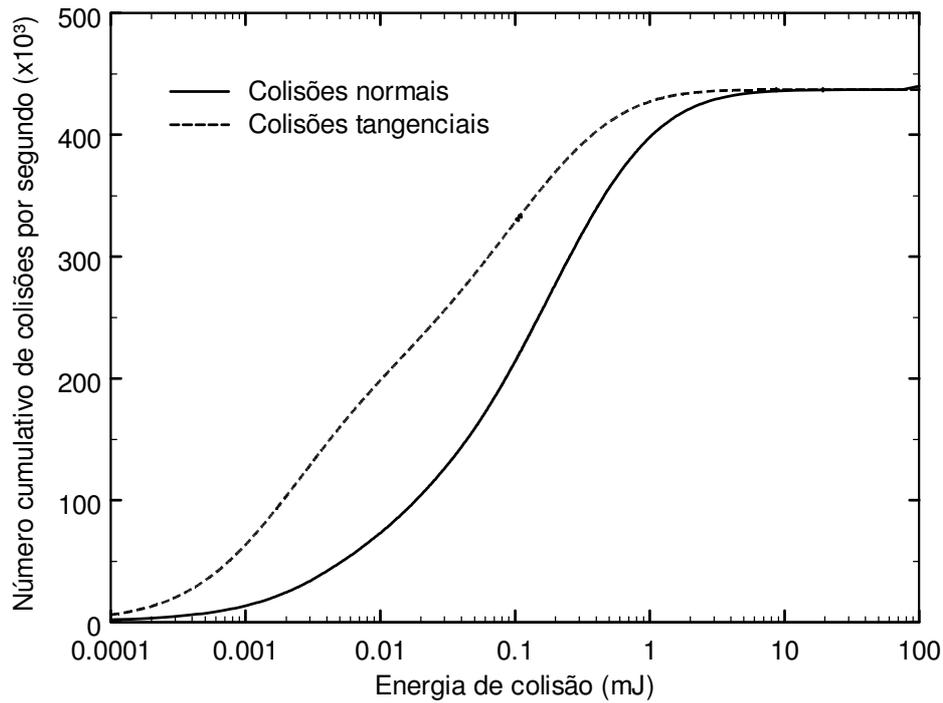


Figura II.18 - Espectro de colisões normais e tangenciais para um moinho de bolas de 0,30 m x 0,30 m, com enchimento de 30 %, simulado por DEM tridimensional (Tavares e Carvalho, 2009a).

O modelo é baseado na teoria de contato de Hertz, utilizando o módulo de elasticidade linear de meios contínuos para calcular a força normal de duas esferas perfeitamente elásticas submetidas ao contato desconsiderando efeitos de atração. Hertz mostrou que duas partículas esféricas de raios r_1 e r_2 em contato interagem com uma força normal repulsiva,

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{f}_n^r + \mathbf{f}_n^d = k_r \delta_n^{3/2} + (k_d \|\dot{\delta}_n\|^{1/4}) \dot{\delta}_n, \quad (\text{Eq. II.39})$$

A constante de rigidez k_r é dada por,

$$k_r = -\frac{4}{3} Y^* \sqrt{R^*}, \quad (\text{Eq. II.40})$$

e a constante de restituição,

$$k_d = -c_n \left(6m_i Y^* \sqrt{R^*} \right)^{1/2}. \quad (\text{Eq. II.41})$$

Nestas equações, c_n é o coeficiente de restituição normal e Y^* depende do módulo de Young, Y

$$Y^* = \frac{Y}{2(1-\nu^2)} \quad (\text{Eq. II.42})$$

e da razão de Poisson, ν e

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_i\|} + \frac{1}{\|\mathbf{r}_j\|} \quad (\text{Eq. II.43})$$

A taxa de deformação normal, definida por $\dot{\delta}_n = (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i$, é função da velocidade relativa \mathbf{v}_{ij} no ponto de contato,

$$\mathbf{v}_{ij} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) + \left[\boldsymbol{\omega}_j \times (\|\mathbf{r}_j\| \mathbf{n}_j - \boldsymbol{\omega}_i \times (\|\mathbf{r}_i\| \mathbf{n}_i)) \right] \quad (\text{Eq. II.44})$$

na qual \mathbf{n}_i é o vetor unitário que sai do centro das partículas i respectivamente em direção ao ponto de contato com a outra partícula envolvida na colisão (partícula j) e vice versa.

A situação no caso da aplicação de uma força tangencial \mathbf{F}_t é mais complicada. No caso de esferas submetidas a uma carga oblíqua, a força tangencial de contato é calculada pelo modelo de Mindlin (1949). Do mesmo modo que no cálculo da força normal, a força tangencial aplicada à partícula i é a soma de termos referentes à força de repulsão e à de amortecimento, ou seja,

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{f}_t^r + \mathbf{f}_t^d \quad (\text{Eq. II.45})$$

A força repulsiva é dada por,

$$\mathbf{f}_t^r = \mu_s \|\mathbf{f}_n^r\| \left[1 - \left(1 - \frac{\|\delta_t\|}{\mathcal{X}} \right)^{3/2} \right] \left(\frac{\delta_t}{\|\delta_t\|} \right), \quad (\text{Eq. II.46})$$

na qual μ_s é o coeficiente de atrito estático e,

$$\chi = \mu_s \frac{2 - \nu}{(2 - 2\nu)\|\delta_n\|} \quad (\text{Eq. II.47})$$

representa a deformação tangencial máxima antes de ocorrer o escorregamento. Para satisfazer a lei do atrito de Coulomb, esta força é limitada superiormente por $\mu_s \mathbf{f}_n^r$, que resulta na relação, $0 \leq \|\delta_t\| \leq \chi$.

A força de restituição é proporcional à taxa de deformação tangencial no ponto de contato, $\dot{\delta}_t$.

$$\mathbf{f}_t^d = -c_t \left(6M_i \mu_s \|\mathbf{f}_n^r\| \frac{\sqrt{1 - \|\delta_t\|/\chi}}{\chi} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\delta}_t \quad (\text{Eq. II.48})$$

na qual c_t é o coeficiente de restituição tangencial e a taxa de deformação tangencial é dada por,

$$\dot{\delta}_t = \mathbf{v}_{ij} - (\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{n}_i \quad (\text{Eq. II.49})$$

O torque atuante na partícula i quando esta colide com uma partícula j pode ser modelado pelo produto da força atuante na partícula pelo seu raio, ainda, segundo Zhou *et al.* (1999) o torque resultante pode ser definido como o torque do atrito de rolamento, definido por:

$$\mathbf{T}_i = -\mu_r \|\mathbf{f}_n^r\| \frac{\boldsymbol{\omega}_i}{\|\boldsymbol{\omega}_i\|} \quad (\text{Eq. II.50})$$

sendo μ_r é o coeficiente de atrito de rolamento.

O modelo da força de contato requer a informação de ambos os coeficientes de restituição e de atrito das partículas. Estes parâmetros são de obtenção experimental muito difícil e variam de partícula para partícula. Esta limitação vem da variabilidade

natural das propriedades físicas dos materiais que constituem as partículas (corpos moedores) e moinhos simulados.

O algoritmo do DEM é bastante simples e pode ser descrito por três etapas:

- Uma malha de busca é utilizada para periodicamente construir uma lista de interações das vizinhanças das partículas. Os objetos limite aparecem como partículas virtuais. Utilizando somente pares de partículas perto da lista de vizinhanças reduz o cálculo da força para uma operação $O(N_i)$, sendo N_i o número total de partículas.
- As forças de colisão em cada uma das partículas e objetos limite são avaliados eficientemente utilizando a lista de vizinhanças e o modelo contato, então transforma-se o resultado na janela de referência para a próxima iteração.
- Todas as forças em cada um dos objetos e partículas são somadas e as seguintes equações de movimento são integradas:

$$M_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum \mathbf{F}_i + \mathbf{g} \quad (\text{Eq. II.51})$$

$$I_i \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} = \sum \mathbf{T}_i \quad (\text{Eq. II.52})$$

Nestas equações, M_i e I_i denotam a massa e o momento de inércia de uma partícula i e $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_{i,x}, \mathbf{v}_{i,y}, \mathbf{v}_{i,z})$ e $\boldsymbol{\omega}_i = (\boldsymbol{\omega}_{i,x}, \boldsymbol{\omega}_{i,y}, \boldsymbol{\omega}_{i,z})$ são suas velocidades, linear e angular. Ao somatório das forças de contato que atuam na partícula no caso do DEM para partículas sólidas deve se somar a força gravitacional \mathbf{g} .

Por outro lado, no caso da previsão da quebra, o DEM apresenta desvantagens que, virtualmente, o inviabiliza como ferramenta para simulação dos processos de cominuição. Além de demandar um alto poder computacional para realização dos cálculos (Powell e Morrison, 2007), os parâmetros utilizados no modelo necessitam de calibração, como por exemplo, os coeficientes de restituição e de contato. Estes parâmetros são de difícil determinação empírica e exercem grande influência no resultado final (potência consumida e espectro de energias de impacto) desta ferramenta. Ainda assim, pesquisadores têm demonstrado algumas aplicações em

condições idealizadas (Potapov e Campbell, 1995; Morrison e Cleary, 2004; Schubert *et al.*, 2006).

Com o desenvolvimento do DEM, os pesquisadores passaram a se aproveitar da disponibilidade da determinação do espectro de energias de impacto nos equipamentos de cominuição. De posse destas informações, Datta (1999) desenvolveu um modelo baseado na aplicação da energia em leitos de partículas com a mesma filosofia de Cho, Bourgeois e King. Datta avaliou o efeito das dimensões do moinho no espectro de energias de impacto. Para as mesmas condições de grau de enchimento e percentual da velocidade crítica (parâmetros operacionais em moinhos de bolas) ele pôde caracterizar que o espectro de energias é ligeiramente diferente, sendo função da geometria e das condições operacionais do moinho. O modelo proposto por Datta presume que o material ao entrar no moinho é distribuído em classes de tamanho e também em classes de energia de acordo com o espectro de energias de impacto. Para uma classe de tamanho i a taxa de desaparecimento é,

$$\text{Taxa de desaparecimento no tempo } t = \lambda_k r_{i,k} w_i(t) \quad (\text{Eq. II.53})$$

O termo $\lambda_k m_i(t)$ indica que uma parte do número total de impactos de um determinado nível de energia k é efetivo na quebra de partículas de tamanho i . $w_i(t)$ é a fração mássica de material na classe de tamanho i no instante de tempo t e $r_{j,k}$ é a fração mássica das partículas pertencentes à classe i que quebram devido a colisão de nível de energia k .

A taxa de geração de material na classe de tamanho i é dada por,

$$\text{Taxa de geração no tempo } t = \lambda_k r_{j,k} b_{ij,k} w_j(t) \quad (\text{Eq. II.54})$$

na qual a fração mássica de material que aparece na classe de tamanho i proveniente de um impacto de nível energético k sobre as partículas da classe de tamanho j é dada pela função quebra, $b_{ij,k}$. Datta levou em consideração esse efeito e apresentou um modelo para um moinho de bolas operando em batelada, dado por,

$$\frac{dw_i}{dt} = -\sum_{k=1}^N \lambda_k r_{i,k} w_i + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_k r_{j,k} b_{ij,k} w_j \quad (\text{Eq. II.55})$$

Pode-se dizer que o modelo formulado por Datta é a aplicação do MBP clássico (Equação II.22) com mais uma dimensão de propriedades que neste caso é o espectro de energias de impacto. Neste caso a função seleção clássica é substituída pela soma do produto do número de impactos e pela proporção quebrada correspondente. A função quebra é substituída pela função quebra em função da energia. Na realidade, conforme discutido anteriormente, a função quebra no MBP clássico é uma ponderação entre diversas funções quebra presentes no ambiente de moagem.

O modelo proposto por Datta mantém umas das limitações do modelo do balanço populacional: a hipótese de cinética de quebra de primeira ordem. A cinética de primeira ordem no MBP implica que as funções que descrevem as características de quebra (função quebra e seleção) permanecem constantes ao longo processo de cominuição. Datta também não considerou a quebra de partículas por mecanismos de abrasão.

No início dos anos 90, o Professor R. Peter King do Utah Comminution Center resgatou as pesquisas abordando a quebra de partículas individuais, e não leitos, defendendo a abordagem em microescala dos processos de quebra de partículas. Estudos realizados em Utah (Tavares, 1997) mostraram que uma população de partículas possui uma variabilidade intrínseca atribuída à sua resistência à fratura. Desta forma, de um mesmo minério, podem se encontrar presente uma partícula muito resistente e outra bastante frágil. Esta variabilidade é normalmente atribuída a diversos fatores (King, 2001), e que por sua vez exerce grande influência nos processos de cominuição e explicita um dos pontos fracos do modelo do balanço populacional clássico aplicado neste tipo de processo. Pois, é sabido que este o MBP convencional considera as propriedades médias de quebra do material. A princípio, as limitações apresentadas pelos modelos mostrados até aqui, poderiam ser contornadas com a inclusão da variabilidade das propriedades das partículas. Porém, faz-se necessário compreender como é feita a determinação da energia necessária para quebrar uma partícula.

A proposta de caracterização da fratura de partículas individuais em microescala demandou o desenvolvimento de um novo equipamento capaz de medir a resistência de

cada partícula quando esta era submetida a um impacto de energia conhecida sob taxas de carregamento típicas encontradas em britadores e moinhos. Este equipamento, chamado de Célula de Carga de Impacto (CCI), foi desenvolvido no Utah Comminution Center (Weichert e Herbst, 1986), a partir da instrumentação de uma barra metálica com transdutores de pressão de alta sensibilidade e sistemas de laser e foto-diodo. A CCI permitiu o estudo das propriedades fundamentais relevantes na quebra das partículas com rapidez e facilidade (King e Bourgeois, 1993; Tavares e King, 1998). A Figura II.19, apresenta a CCI juntamente com o aparato de aquisição de dados.

Na CCI, partículas de determinada faixa de tamanho são submetidas individualmente ao impacto pela queda livre de uma massa esférica. O impacto faz com que a onda de choque se propague na barra de aço. A propagação da onda na barra gera um perfil força-tempo (Figura II.20), que posteriormente é analisado e fornece a energia específica de fratura E , calculada a partir da Equação II.56.

$$E = \frac{1}{m} \left[v_0 \int_0^{t_c} F(t) dt + g \int_0^{t_c} F(t) dt - \frac{1}{2m_b} \left(\int_0^{t_c} F(t) dt \right)^2 - \frac{1}{\rho AC} \int_0^{t_c} F^2(t) dt \right] \quad (\text{Eq. II.56})$$

sendo t_c o instante de tempo da fratura primária da partícula, m_p a massa da partícula, v_0 a velocidade de impacto, g a aceleração da gravidade, A a área da seção transversal, ρ a densidade e C a velocidade de propagação da onda na barra (Tavares, 2007, Tavares e King, 1998, Tavares e King, 2004).

A caracterização de um material envolve dezenas de ensaios de determinação da energia de fratura, que por sua vez é gerada de cada perfil força-tempo. A Figura II.21 apresenta uma curva de probabilidades de quebra ou de distribuição de energias de fratura de uma amostra de bauxita.

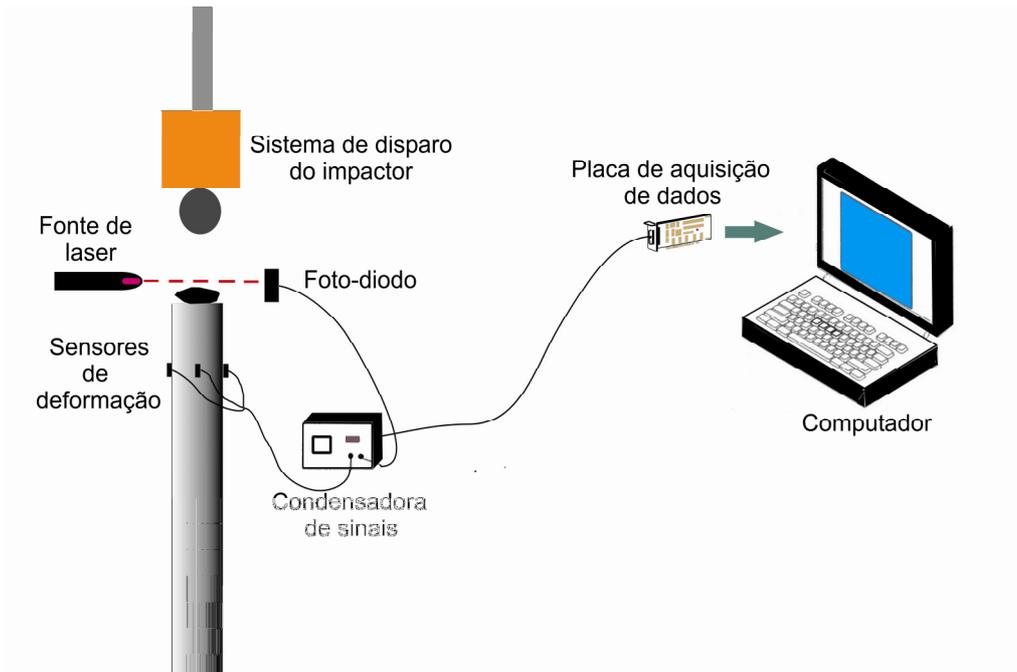


Figura II.19 - Esquema do dispositivo da célula de carga de impacto ultra-rápida (Tavares, 2007).

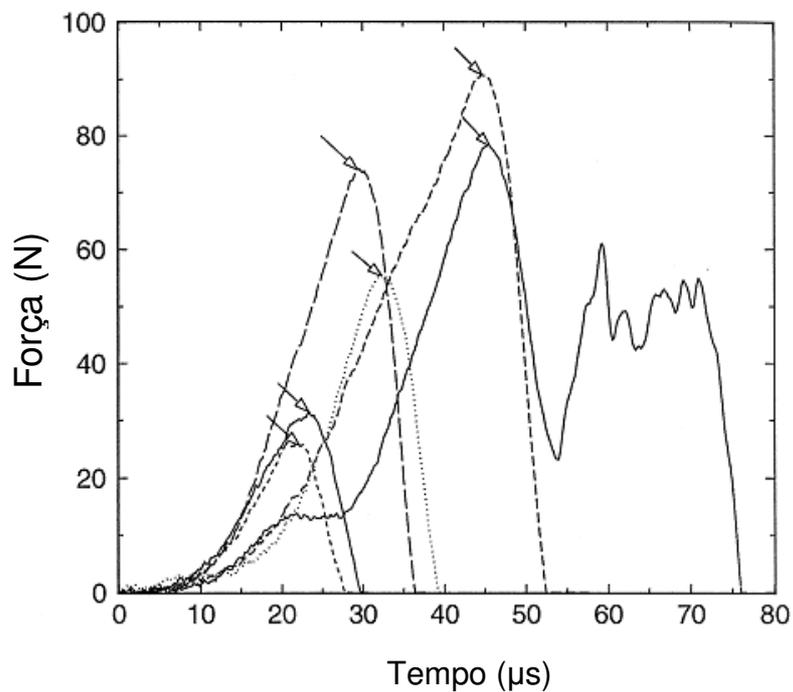


Figura II.20 - Seis perfis força-tempo gravados para partículas de quartzo na faixa de 1,00 x 1,18 mm impactadas utilizando uma esfera de aço de 0,0283 kg na velocidade de 1,16 m/s. As setas mostram o instante da fratura. A variação na resposta dentre as partículas individuais é evidente (Tavares e King, 1998).

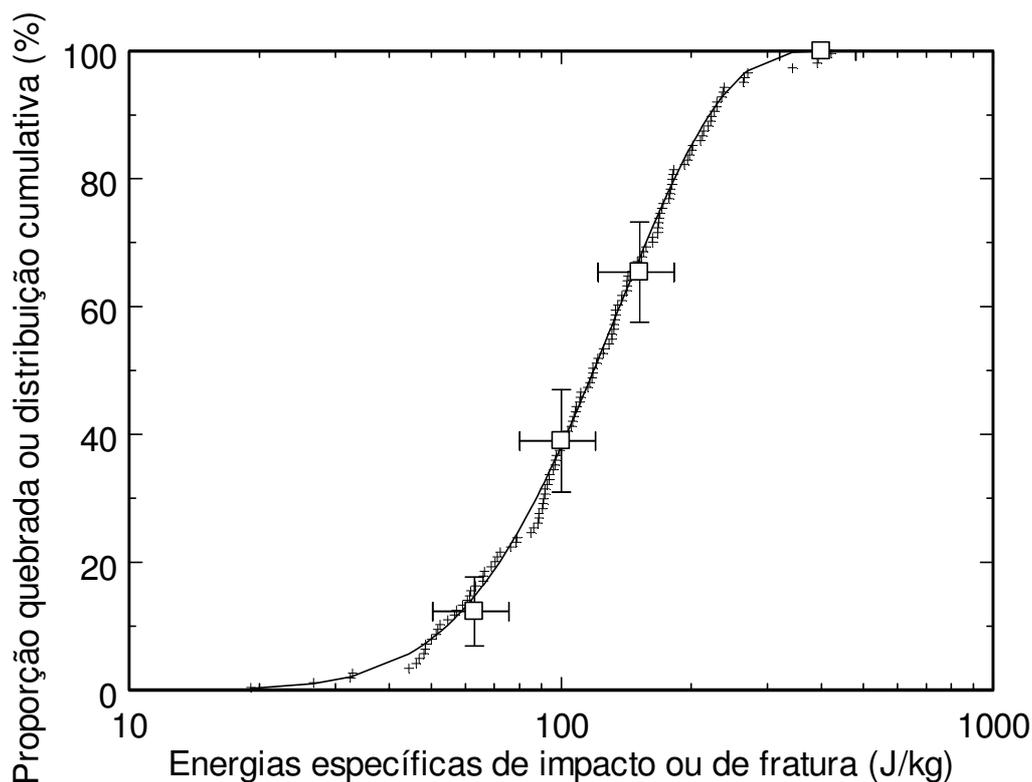


Figura II.21 - Probabilidades de quebra e distribuição de energias específicas de fratura de partículas de 45,0 x 37,5 mm de bauxita (Tavares, 2007).

Distintamente do modelo apresentado por Datta, King propôs um modelo capaz de considerar agora não só o espectro de energias de impacto, como também a distribuição de energias de fratura (específicas). Da função quebra obtida pela quebra de partículas individuais em função do nível energético, a função quebra ponderada considerando os efeitos no interior no moinho seria,

$$B(x, x') = \int_0^{\infty} \int_0^1 B(x, x', eE) P(eE, x') p(e) p(E) de dE \quad (\text{Eq. II.57})$$

Sendo, $P(E, x')$ a probabilidade de quebra de uma partícula de tamanho x' quando recebe uma quantidade de energia E de um impacto no moinho e $B(x, x', E)$ a função quebra que resulta de um único evento de impacto de energia E . $p(E)$ é a distribuição de densidades para as energias de impacto no moinho e e é a fração da energia naquele impacto que é capturada por uma única partícula. $p(e)$ descreve como e é distribuído

sobre a população de partículas. Nota-se que King inseriu uma variável de distribuição de energias sobre as partículas capturadas naquele impacto.

Supondo um equipamento de cominuição no qual o material alimentado possui partículas em um único tamanho (mono-tamanho) e a distribuição de energia de fratura desta população de partículas é tal qual apresentada na Figura II.21 e que neste equipamento a cada ciclo de quebra, toda a população de partícula recebe impactos de 100 J/kg. De acordo com sua distribuição de energias de fratura aproximadamente metade das partículas quebrariam, restando somente aquelas que apresentam resistências maiores que 100 J/kg, que por sua vez não sofreriam alteração nas suas energias. Isto força uma mudança na distribuição de energias de fratura, que no ciclo de impacto seguinte, apresentaria probabilidade de quebra igual a zero para partículas com energias de fratura inferiores a 100 J/kg. Esta alteração na distribuição de energias de fratura é mostrada na Figura II.22.

A proposta de King mostrou-se bastante promissora apesar de apresentar algumas limitações. Pouco se sabe sobre como a energia aplicada é repartida em um leito de partículas, o que acaba por adicionar mais um grau de complexidade ao modelo. Assim como seus predecessores, o modelo também é baseado na constância das propriedades de quebra das partículas, no qual um exemplo simples mostrou que esta limitação é crítica. O modelo, da forma como foi proposto por King, não chegou a ser validado ou sequer foi utilizado por outros pesquisadores.

Outros autores (Potapov *et al.*, 1995) desenvolveram o método dos elementos discretos aplicado à fratura de sólidos. O modelo, chamado de DGB (*Discrete Grain Breakage*), resolve numericamente as equações de conservação para a propagação de trincas em uma partícula constituída por grãos discretos. Este modelo apresenta como resultado final, a distribuição de tamanhos de partícula, que é integrada para fornecer a distribuição de tamanhos de partículas média para um equipamento de cominuição. Em um trabalho recente, Potapov e Campbell (2000) aplicaram o DGB para estudar como ocorre a quebra em um leito de partículas quando este é submetido ao impacto de uma única esfera de aço (Figura II.23), reproduzindo um cenário que ocorre milhares de vezes por segundo em um moinho de bolas (Tavares e Carvalho, 2009a). Eles chegaram à conclusão de quanto mais espesso é o leito de partículas submetido ao impacto, menor é a intensidade da quebra. Este modelo fornece um bom resultado qualitativo. Porém,

como os próprios autores argumentam, o modelo ainda está longe de ser capaz de simular o completo funcionamento de um moinho de bolas.

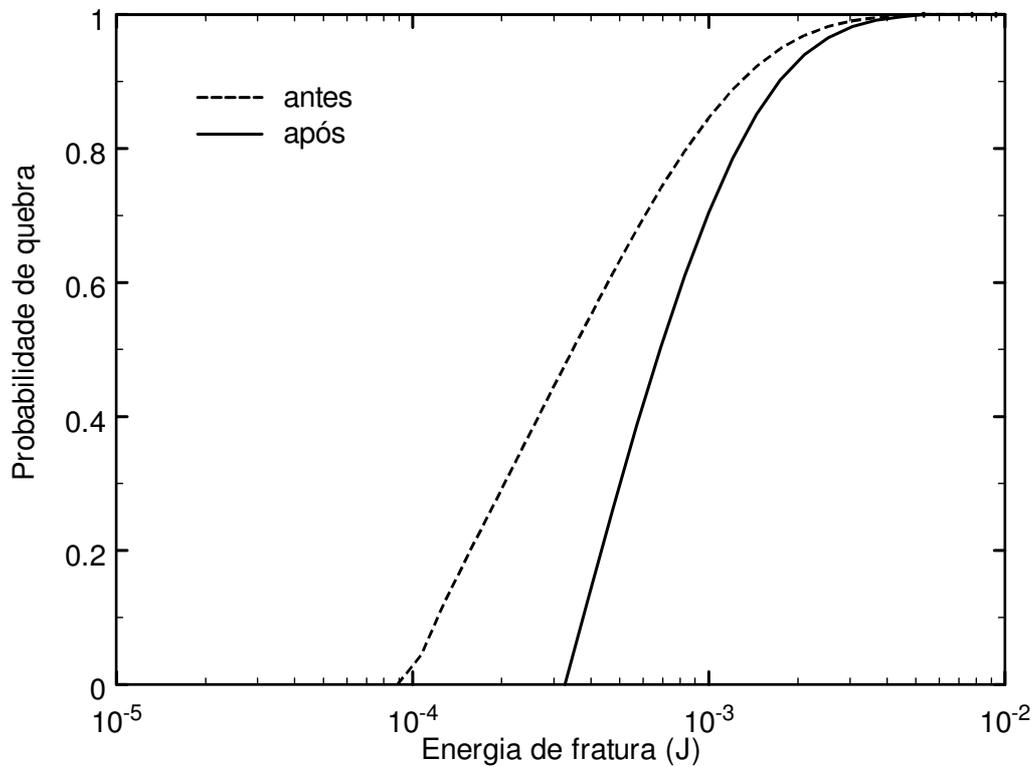


Figura II.22 - Distribuição de energias de fratura antes e após um processo de cominuição em que todas as partículas são submetidas a impacto de energia específica igual a 100 J/kg.

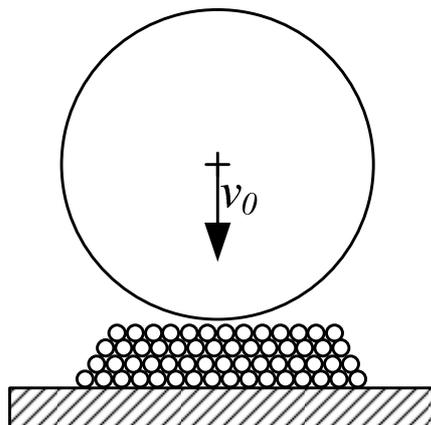


Figura II.23 - Esquemática da simulação do impacto de uma esfera sobre um leito de partículas. A esfera é lançada verticalmente para baixo com velocidade inicial v_0 (Potapov e Campbell, 2000).

Herbst (2004) propôs utilizar resultados de simulações resultantes do DEM em conjunto com a descrição da quebra por DGB juntamente com características de quebra das partículas determinadas em laboratório para alimentar o modelo do balanço populacional. Desta forma, os dois segmentos do modelo seriam caracterizados: os corpos moedores via DEM e as características de quebra das partículas, por ensaios de laboratório (determinação das funções quebra e seleção). Este modelo, chamado pelos autores de HFS (*High Fidelity Simulation*) propõe ainda a utilização de informações de escoamento de polpa obtida por técnicas de fluidodinâmica computacional (CFD), para descrever o transporte do material ao longo dos moinhos. Nesta abordagem ainda não há o desacoplamento total entre os mecanismos, os quais dependem exclusivamente do material e das condições operacionais, sendo a sua aplicação limitada apenas aos moinhos tubulares.

Uma das limitações do DEM e de sua aplicação no modelo de DGB é a dificuldade de se acompanhar cada elemento da população de partículas no interior de um equipamento de cominuição, o que acaba se tornando um problema de caráter não-polinomial. A cada colisão seguida de quebra, novos indivíduos (partículas-filha) seriam gerados demandando uma capacidade ainda maior de processamento. Esta consequência se torna ainda mais crítica se considerarmos a geração de partículas mais finas devido à abrasão. Outra limitação é a necessidade de se calibrar os modelos de DEM e DGB com parâmetros que não são inferidos de maneira simples. Normalmente atribuem-se a eles valores médios que podem não corresponder com a realidade física do problema.

Embora muitos autores defendam que o futuro da modelagem dos processos de cominuição está na abordagem via DEM, a abordagem em microescala tem sua importância. Um melhor entendimento dos fenômenos que envolvem a redução de tamanhos de partícula em microescala permitiria descrever detalhadamente todo o processo.

Vislumbrando o potencial do modelo da quebra em microescala proposto por King, Austin (2004a e 2004b) desenvolveu um estudo abordando simulações preliminares de um equipamento de cominuição idealizado chamado moinhos de martelos de alta velocidade. Neste equipamento as partículas são suspensas em um gás e são impactadas contra uma superfície de um martelo, recebendo uma quantidade de energia que é mensurável e a cada ciclo de impactos. As partículas menos resistentes sofrem quebra, e

são descarregadas através de uma grelha, enquanto que aquelas mais resistentes permanecem no processo. Nesta aplicação o efeito do enfraquecimento das partículas quando estas são submetidas a impactos repetidos é notável, pois, caso contrário, aquelas que resistissem ao impacto inicial permaneceriam no equipamento por um tempo indeterminado. Para contornar este problema, Austin lançou mão da teoria de mecânica do dano (Tavares e King, 2002), no qual a cada ciclo de impactos submetido à fração da população que não sofre quebra, suas energias de fratura são reduzidas em virtude do acúmulo de dano. A abordagem adotada por Austin se mostrou válida, apesar de inúmeras simplificações que foram necessárias para tornar a solução do problema numericamente viável. A principal delas se baseia na consideração que as energias de impacto são constantes, o que raramente se revela em equipamentos de cominuição.

II.3 - Modelagem em microescala

Dentre as diferentes abordagens de modelagem dos processos de cominuição, aquela proposta por King (2001) se mostrou a mais promissora no que diz respeito à separação dos efeitos relacionados aos equipamentos e às características do material. O modelo proposto por King ainda tem a vantagem de ser computacionalmente viável nos dias de hoje, superando com folga no que diz respeito à minimização do esforço computacional demandado pelas simulações de processo quando comparado ao modelo HFS (Herbst, 2004). Para uma melhor compreensão da modelagem em microescala e como ela deve ser utilizada, faz-se necessário descrever alguns mecanismos relacionados à fragmentação de partículas que têm crucial importância nesta abordagem. A modelagem em microescala proposta lança mão da poderosa ferramenta que é o modelo do balanço populacional que, por sua vez, é alimentado por modelos específicos para cada mecanismo envolvido nos processos de cominuição, como, por exemplo, os modelos que descrevem a fratura por impacto de corpo moedor, a fratura por abrasão, a fratura por compressão, a autofratura, o transporte de partículas, a seleção de partículas para impacto, etc.

II.3.1 - Mecânica do Dano

Um dos avanços necessários para tornar o modelo proposto por King mais realista vem da linha de pesquisa desenvolvida por Tavares (1997) na segunda metade da década de 90. Uma de suas conclusões foi que a resistência dos materiais vai se tornando cada vez

mais baixa à medida que as partículas são submetidas a repetidos ciclos de aplicação de energia.

No interior de um equipamento de cominuição, as partículas são submetidas a repetidos eventos de aplicação de esforços (impactos). Estes impactos podem ser, em muitos casos, de magnitude menor que a necessária para quebrar uma partícula. De acordo com esta observação, não se esperaria que as partículas fraturassem quando submetidas a eles. Porém, na prática, observa-se que partículas fraturam mesmo submetidas aos impactos de energia menor que sua resistência quando são submetidas a repetidos impactos. A energia aplicada embora não seja em quantidade necessária para realizar a quebra, pode ser aproveitada na propagação de trincas e tornar a partícula menos resistente (Tavares e King, 2002).

Para descrever quantitativamente a fratura de uma partícula por impactos repetidos, os mecanismos dominantes devem ser identificados precisamente. Essencialmente, existem pelo menos duas razões pelas quais uma partícula pode não fraturar no primeiro impacto, mas somente após a aplicação de diversos esforços (Vervoorn e Austin, 1990). Tavares e King (2002) mostraram que o mecanismo baseado na propagação das trincas pré-existentes nas partículas é provavelmente o responsável pela quebra da partícula após repetidos impactos, conforme mostrado na Figura II.24. Baseado nisso, eles propuseram a aplicação das teorias de mecânica do dano à fragmentação de partículas. A mecânica do dano é um campo na mecânica de sólidos que evoluiu significativamente nas últimas décadas, dada a sua capacidade de descrever situações nas quais as formulações da mecânica da fratura se tornaram ou muito complexas ou são indisponíveis.

Reconhecendo que tanto o enfraquecimento causado por impactos repetidos, quanto o comportamento de deformação inelástica das partículas sujeitas a impactos são resultados do dano na forma de propagação das trincas, Tavares (1997) desenvolveu e validou um modelo de enfraquecimento de materiais particulados por impactos repetidos a partir do modelo de mecânica do dano contínuo aplicado à fratura de partículas.

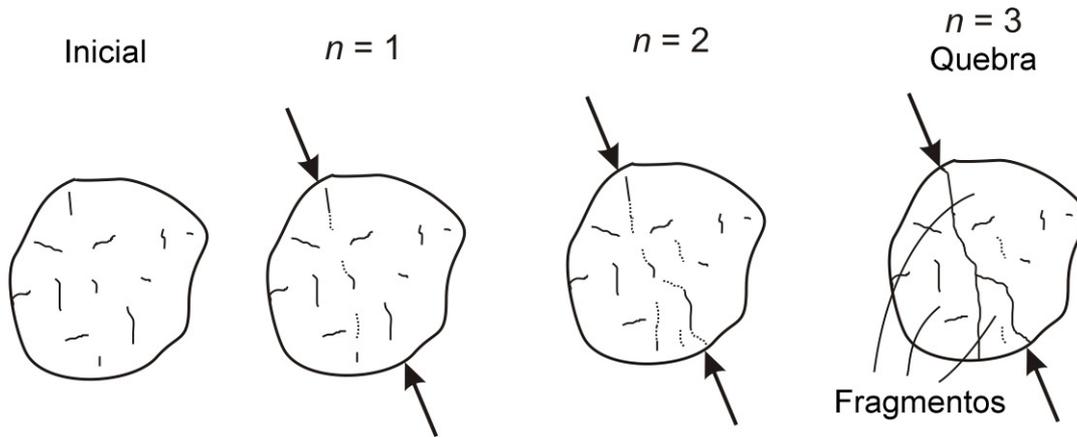


Figura II.24 - Ilustração do enfraquecimento devido ao acúmulo de dano de uma partícula submetida a repetidos impactos (Tavares, 2007).

• **Derivação do modelo**

O modelo de mecânica do dano desenvolvido por Tavares (1997) é fundamentado na teoria de contato de Hertz e tem sua forma matemática final bem simples (Equações II.63 e II.64). A energia na forma de tensão absorvida por uma partícula submetida ao carregamento pode ser calculada via integração direta do perfil de deslocamento da carga $\Xi(\vartheta)$, dividindo o resultado da integração pela massa de uma partícula m_p ,

$$E_{k,n} = \frac{1}{m_p} \int_0^{\vartheta_n} \Xi d\vartheta \quad (\text{Eq. II.58})$$

Se considerarmos que toda a energia que foi aplicada a uma partícula de forma esférica, a qual corresponde à energia cinética do impactor, é efetivamente convertida em energia de deformação (sem perda energética para a superfície plana sob a partícula), então (Tavares, 2009),

$$E_{k,n} = \frac{1}{m_p} \int_0^{\vartheta_n} \frac{k\sqrt{d}}{3} \left[1 - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_c} \right) \right] \vartheta^{3/2} d\vartheta \quad (\text{Eq. II.59})$$

que após resolver e definindo D_n^* como,

$$D_n^* = \left(\frac{\vartheta_n}{\vartheta_c} \right)^\gamma \quad (\text{Eq. II.60})$$

sendo ϑ_n a máxima deformação atingida durante o n -ésimo evento de carregamento e d o diâmetro da partícula, e reconhecendo que a rigidez da partícula antes do evento de carregamento n é k_{n-1} , então a equação II.59 se torna,

$$E_{k,n} = \frac{2}{15} \left(\frac{2\gamma + 5 - 5D_n^*}{2\gamma + 5} \right) \frac{k_{n-1} \alpha_n^{5/2} d^{1/2}}{m_p} \quad (\text{Eq. II.61})$$

sendo $E_{k,n}$ a energia cinética específica do impactor (energia cinética do impactor por unidade de massa da partícula) no n -ésimo evento de carregamento que é toda convertida em energia de deformação.

A energia específica requerida para estilhaçar completamente a partícula, que é chamada energia específica de fratura da partícula, pode ser calculada pela substituição de $D_n^* = 1$ e $\vartheta_n = \vartheta_c$ na Equação II.61, que fornece,

$$E_{n-1} = \frac{4\gamma}{15(2\gamma + 5)} \frac{k_{n-1} \vartheta_n^{5/2} d^{1/2}}{m_p} \quad (\text{Eq. II.62})$$

Presumindo que a equação permanece válida durante vários impactos, então substituindo a Equação II.62 na Equação II.60 obtém-se a relação entre a energia específica de fratura em sucessivos impactos como,

$$E_n = E_{n-1} (1 - D_n^*) \quad (\text{Eq. II.63})$$

Rearranjando as Equações II.60 e II.63 e substituindo na Equação II.62, a quantidade de dano sofrido no n -ésimo ciclo é dado por,

$$D_n^* = \left[\frac{2\gamma}{(2\gamma - 5D_n^* + 5)} \frac{E_{k,n}}{E_{n-1}} \right]^{2\gamma} \quad (\text{Eq. II.64})$$

Este modelo não requer que se trabalhe diretamente com as curvas de tensão-deformação de cada partícula, o que simplifica a modelagem, de forma que o único parâmetro a ser ajustado é o γ .

As equações II.63 e II.64 devem ser resolvidas iterativamente por algum método numérico de modo que a convergência em D_n^* é atingida em poucos passos.

• **Caracterização do material (parâmetro γ)**

Com o objetivo de se determinar o parâmetro do dano (γ), a distribuição de energias específicas de fratura para um dado tamanho de partícula de interesse deve ser conhecida. Conforme mencionado no Capítulo II.2.3, pode-se utilizar os ensaios de fragmentação na CCI, integrando diretamente os perfis tensão-deformação até o instante de fratura. Alternativamente, pode-se estimar a distribuição de energias de fratura a partir da distribuição de probabilidades de quebra. Essa última pode ser determinada quando um grande número de partículas é submetido ao impacto, uma por vez, e assim encontrando a razão entre a proporção quebrada e o total de partículas impactadas como função da magnitude do impacto (Tavares, 2009).

Os dados de energia (específica) de fratura podem ser ajustados a uma função probabilística. Uma distribuição que é capaz de descrever estes dados adequadamente é a distribuição log-normal com truncamento superior, descrita por,

$$F(E) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln E^* - \ln E_{50}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right] \quad (\text{Eq. II.65})$$

com,

$$E^* = \frac{E_{\max} E}{E_{\max} - E} \quad (\text{Eq. II.66})$$

na qual, E_{50} é a mediana da energia específica de fratura e σ é o desvio padrão da distribuição, E_{\max} é a energia de truncamento superior.

Na prática o que ocorre quando toda a população de partículas que possui uma variabilidade na sua distribuição de energias de fratura sofre impactos sequenciais é representado na Figura II.25.

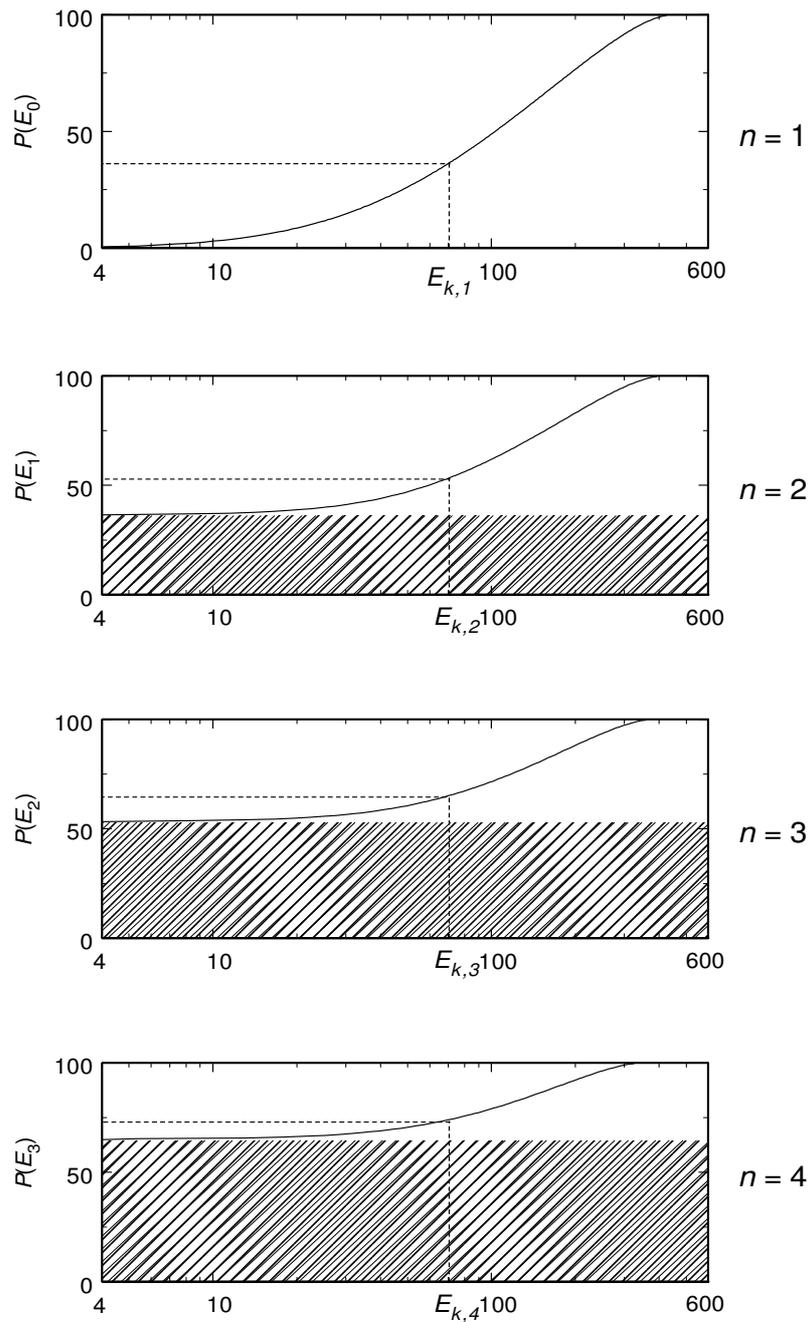


Figura II.25 - Simulação de três eventos de carregamento sequenciais utilizando $\gamma=3,3$, dados de energia de fratura da Figura II.21 e a energia de impacto $E_{k,n} = 70,6$ J/kg idêntica em todos os eventos simulados (Tavares e Carvalho, 2007).

Na Figura II.25 são representados quatro eventos de quebra. Inicialmente tem-se a distribuição de energias de fratura original do material em uma determinada faixa de tamanho. Após todas as partículas receberem o primeiro impacto de magnitude

energética $E_{k,1}$, uma parte da população que possui energia de fratura menor que esta energia de impacto $E_{k,1}$, fratura e desaparece da distribuição enquanto que as partículas que não quebram, sofrem efeito de enfraquecimento traduzido pelo dano, que por sua vez é calculado pelas Equações II.63 e II.64.

De posse da distribuição de probabilidades de quebra, são realizados ensaios de impactos repetidos. Neste ensaio, partículas são submetidas individualmente a impactos, de um nível de energia selecionado, pela queda de um peso contra uma superfície plana, sendo que cada impacto sobre uma partícula é repetido até que ocorra um evento de quebra. Os impactos são repetidos até um número máximo de vezes e, ao fim do ensaio, contabiliza-se o número de impactos necessários para quebrar cada partícula. A partir desta informação calcula-se a proporção de partículas quebradas para cada número de impactos daquele nível energético. A Figura II.26 mostra um resultado típico de um teste de impactos repetidos para ajuste do parâmetro do dano (γ).

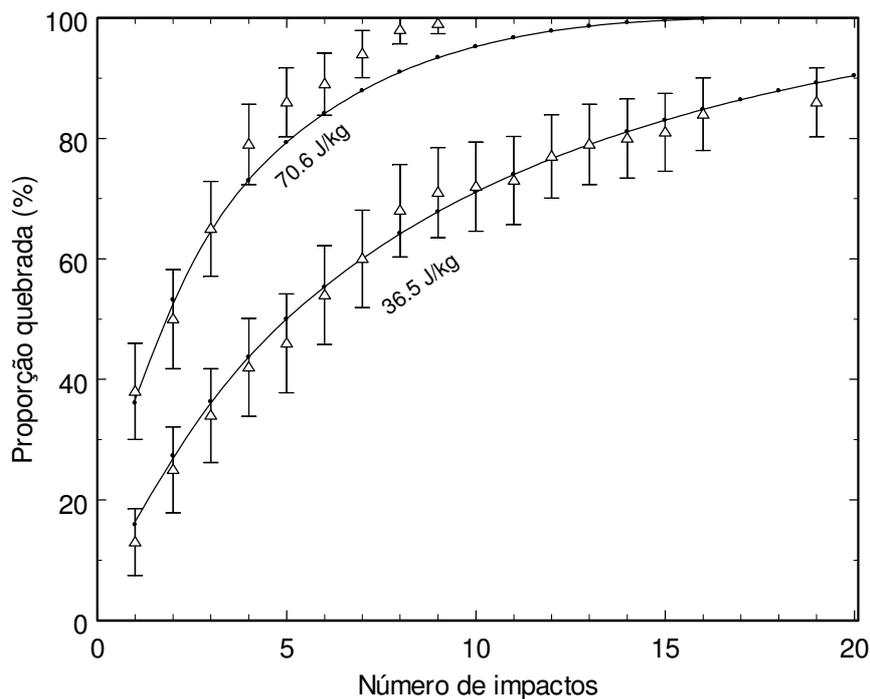


Figura II.26 - Proporção quebrada acumulada experimental (triângulos) de partículas de bauxita contidas na faixa de 45 x 37,5 mm e simulada (pontos) após repetidos impactos em dois níveis diferentes de energia. A linha sólida é o ajuste dos pontos simulados para $\gamma = 3,3$ (Tavares, 2009).

II.3.2 - Descrição matemática dos mecanismos de quebra

Devido à grande diversidade de máquinas de cominuição e às diferenças na forma de aplicação de esforços na redução de tamanho das partículas processadas, alguns pontos devem ser considerados para melhor entender a descrição matemática do processo.

Nos moinhos de bolas, a grande maioria dos eventos de quebra se dá devido ao impacto dos corpos moedores, geralmente esferas de aço, sobre as partículas enquanto que a contribuição à quebra dada pela abrasão ou atrição é bem pequena.

Já nos britadores de rolos pode-se dizer que a quebra é gerada por predominância dos esforços compressivos combinados ao efeito de cisalhamento, o que causa a fratura por abrasão. Nos moinhos autógenos não são empregados corpos moedores e a quebra se dá por impacto das partículas maiores contra o revestimento do moinho, tipo de impacto caracterizado como autofratura, ou contra um leito de partículas menores. Finalmente nos moinhos semi-autógenos, além da autofratura, os corpos moedores presentes também realizam ação de quebra como em um moinho de bolas.

Muitas vezes o MBP clássico não consegue descrever adequadamente o processo cinético de quebra como, por exemplo, nos moinhos de bolas. Isto pode ocorrer devido ao fato de que alguns mecanismos de quebra distintos podem ocorrer que, aliados à incapacidade do MBP de separá-los, pode atribuir efeitos compensatórios de diferentes mecanismos de quebra a um único mecanismo médio. Por exemplo, em outras palavras, em um processo de cominuição no qual ocorre quebra por impacto e abrasão em iguais proporções, a utilização de um modelo matemático baseado no MBP clássico implicaria em tentar descrever o efeito conjunto destes dois mecanismos como se fossem apenas quebra por impacto. Obviamente, o modelo não conseguiria descrever e nem prever um resultado coerente desta forma.

Tavares (1997) sugeriu que para uma descrição avançada dos processos de cominuição os mecanismos de quebra devem ser modelados individualmente e por fim agregados a um modelo que atribuísse o peso de cada mecanismo na redução dos tamanhos das partículas. O interessante desta filosofia é que se pode aplicá-la na descrição, inclusive, de ensaios clássicos de caracterização de materiais na indústria mineral (Tavares e Carvalho, 2007).

• Modelagem da quebra por abrasão

O termo aqui definido como abrasão engloba a quebra por atrição e por lascamento e tem papel importante em alguns equipamentos de cominuição. Estes mecanismos de quebra ocorrem na superfície das partículas sem afetar o seu núcleo (King, 2001). As partículas estão sujeitas à atrição através da fricção entre as partículas e pelo contato das partículas com as paredes dos equipamentos. O lascamento ocorre quando as partículas impactam com baixa energia outras partículas ou as paredes do equipamento. O lascamento e a atrição podem ser agrupados e modelados como um único mecanismo, denominado abrasão.

O ensaio de tamboramento padronizado pelo JKMRC (Napier-Munn *et al.*, 1996) tem como objetivo caracterizar a suscetibilidade do material processado à quebra por abrasão. Neste ensaio uma amostra de 3 kg de material de tamanho 53,0 x 37,5 mm é submetida ao tamboramento em um moinho tubular de 30 cm x 30 cm, sem carga de corpos moedores por um período de 10 minutos. Decorrido o tempo de ensaio, realiza-se uma análise granulométrica do conteúdo do moinho. Dessa análise granulométrica determina-se um parâmetro chamado P_A que diz respeito ao índice de abrasão do material processado. Este parâmetro alimenta modelos cinéticos de abrasão aplicados a modelos de moinhos semi-autógenos (Napier-Munn *et al.*, 1996). O parâmetro P_A corresponde à proporção de partículas finas geradas ao fim do ensaio de tamboramento. King (2001) propôs que este parâmetro seja utilizado diretamente no cálculo da taxa de quebra por abrasão (κ) na modelagem de moinhos autógenos e semi-autógenos.

Assume-se que o tamanho inicial das partículas não influencia a taxa de geração e o tamanho dos produtos de abrasão. A taxa de quebra por abrasão obtida do ensaio padrão de tamboramento pode ser escrita por meio de,

$$\kappa = \frac{45,4P_A}{30} \quad (\text{Eq. II.67})$$

A função quebra dos produtos da atrição e lascamento é modelada utilizando uma simples função logarítmica (King, 2001),

$$A_i = \left(\frac{d_i}{d_A} \right)^{\lambda_A} \quad (\text{Eq. II.68})$$

sendo d_A o tamanho do maior fragmento gerado por abrasão e λ_A a inclinação da reta da curva de distribuição de tamanhos dos produtos do ensaio de abrasão (em coordenadas logarítmicas).

Vale ressaltar que em um ensaio de tamboramento como o utilizado para se determinar os parâmetros de abrasão de um material, dependendo da resistência do material estudo, o produto final pode ser uma mescla de produtos de abrasão e de impactos de baixa magnitude energética, como na Figura II.27. Tavares e Carvalho (2009b) desacoplaram estes efeitos de forma que foi possível determinar a real taxa de quebra por abrasão nesse ensaio padronizado.

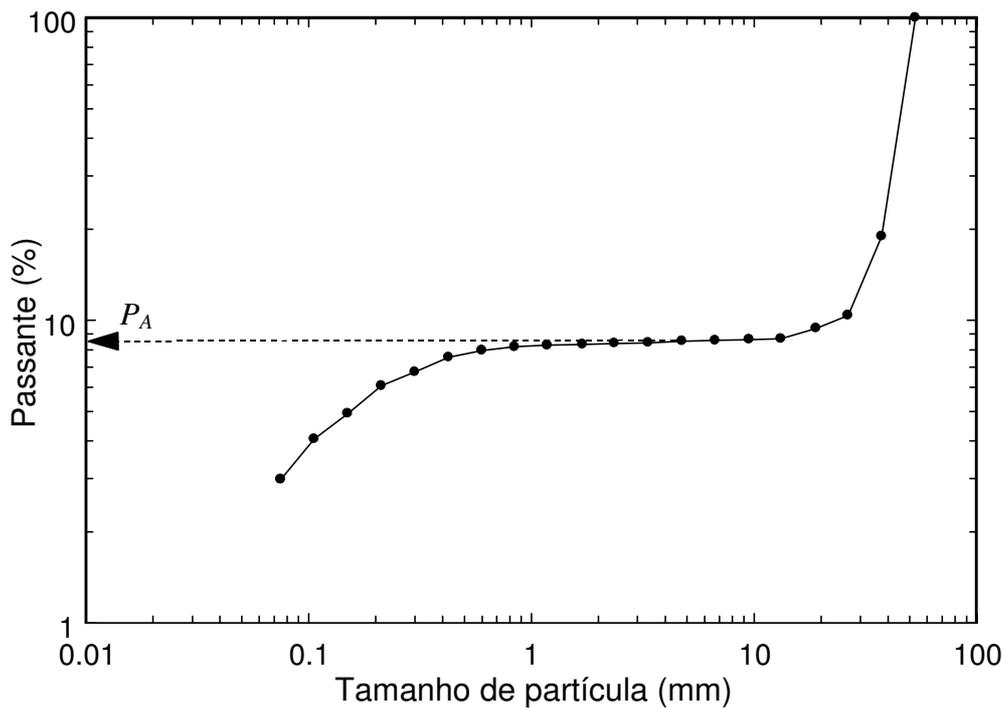


Figura II.27 - Produto do ensaio de abrasão JKMRC para um calcário indicando o valor do parâmetro P_A .

• Modelagem da quebra por impacto

Uma descrição essencial na modelagem dos processos de cominuição é a função de distribuição de quebra. Essa função, normalmente denominada de função quebra é uma matriz que descreve como os fragmentos gerados pela quebra de uma partícula de determinado tamanho se distribuem nos tamanhos subsequentes.

Geralmente se considera quebra, para efeito de função quebra, como sendo o evento em que a partícula original deixa sua classe de tamanho (Austin *et al.*, 1984). Entretanto, na modelagem em microescala, as partículas são consideradas quebradas quando perdem pelo menos 10% de sua massa original, mesmo quando não deixam a classe de tamanho original. Esta definição é necessária para manter a consistência com a definição de quebra utilizada nos ensaios de determinação da energia de fratura de partículas na CCI (Tavares e King, 1998). Desta forma é possível que uma partícula sofra quebra e ainda permaneça no seu tamanho original.

Os testes de impacto individuais têm mostrado claramente que a função quebra é determinada em quantidade de energia disponível para quebrar uma partícula. Quanto maior a energia aplicada, mais fino será o produto da quebra. Isto ocorre principalmente devido a sucessivos eventos de quebra da partícula original e seus fragmentos até que a energia total de impacto seja dissipada.

A relação entre a energia aplicada e o nível de quebra tem sido caracterizada pela relação $t_{10} \times E$, conforme apresentado na Equação II.33. Porém, é sabido que esta relação varia com o tamanho de partícula, sendo assim surgiram algumas tentativas recentes para se formular uma única relação que considere este efeito, como aquela proposta por Shi e Kojovic (2007), modificando a equação original do t_{10} (Equação II.33). Tavares (2009), por sua vez, propõe incorporar o efeito da energia de fratura, que varia com tamanho de partícula, na relação do t_{10} com a energia de impacto. A função quebra de um material passa ser caracterizada não somente pela energia de impacto aplicada às partículas como também pela mediana das energias de fratura das partículas que quebram no evento de quebra. Sendo assim, a equação II.33, se torna,

$$t_{10} = A \left[1 - \exp \left(-b' \frac{E}{E_{50b}} \right) \right] \quad (\text{Eq. II.69})$$

Nesta equação, os parâmetros A e b' são característicos de cada material e são determinados a partir dos parâmetros t_{10} e E_{cs} de ensaios de impacto de partículas individuais para várias faixas de tamanho. O termo E_{50b} é a mediana da distribuição de energias de fratura das partículas que quebram naquele ciclo de impacto.

III - DESENVOLVIMENTO DO MODELO

A natureza mecânica do modelo generalizado pode ser evidenciada quando o mesmo é utilizado na descrição de alguns casos selecionados. Este capítulo trata do desenvolvimento da formulação geral do MGC, da qual serão derivados os estudos de caso apresentados no Capítulo IV.

Por definição, entende-se que o termo “material” mencionado no texto se refere à população de partículas sólidas, a que pode ser de um minério, um clínquer ou qualquer outro material sólido, que pode ser processada em um equipamento de cominuição.

Uma esquema geral dos princípios do modelo generalizado desenvolvido nesta dissertação é ilustrado na Figura III.1, cuja generalidade está no fato do modelo ser alimentado com informações fundamentais das propriedades de quebra do material de forma a descrever os diferentes mecanismos de quebra relevantes em determinado processo de cominuição (Tabela III.1). Além disto, o modelo é capaz de ser utilizado na modelagem de diferentes equipamentos, devido, sobretudo, à sua capacidade de desacoplar inteiramente os efeitos de material e do ambiente de moagem, ao contrário dos modelos clássicos baseados no MBP.

O ambiente mecânico de moagem é caracterizado basicamente pelo espectro de energias de impacto, que informará como a energia dissipada no ambiente de moagem é aplicada às partículas que se deseja cominuir. Conforme discutido anteriormente, na grande maioria dos processos de moagem e britagem o espectro de energias de impacto deverá ser obtido por simulações utilizando o Método dos Elementos Discretos. Em casos mais simples, como a previsão dos processos de manuseio e transporte, a utilização do DEM na determinação das energias de impacto não é necessária.

O modelo demanda também que as propriedades de mistura e transporte sejam informadas, como por exemplo, se o moinho pode ser considerado mistura perfeita, se há ou não efeito de classificação interna, bem como relações de transferência de massa. Para efeito de simplicidade na apresentação do MGC, nesta dissertação será apresentada somente a modelagem para um único reator de mistura perfeita. A abordagem pode ser estendida aos processos de fluxo pistão ou considerando a distribuição de tempos de residência dos elementos da população de partícula ao longo de um processo contínuo.

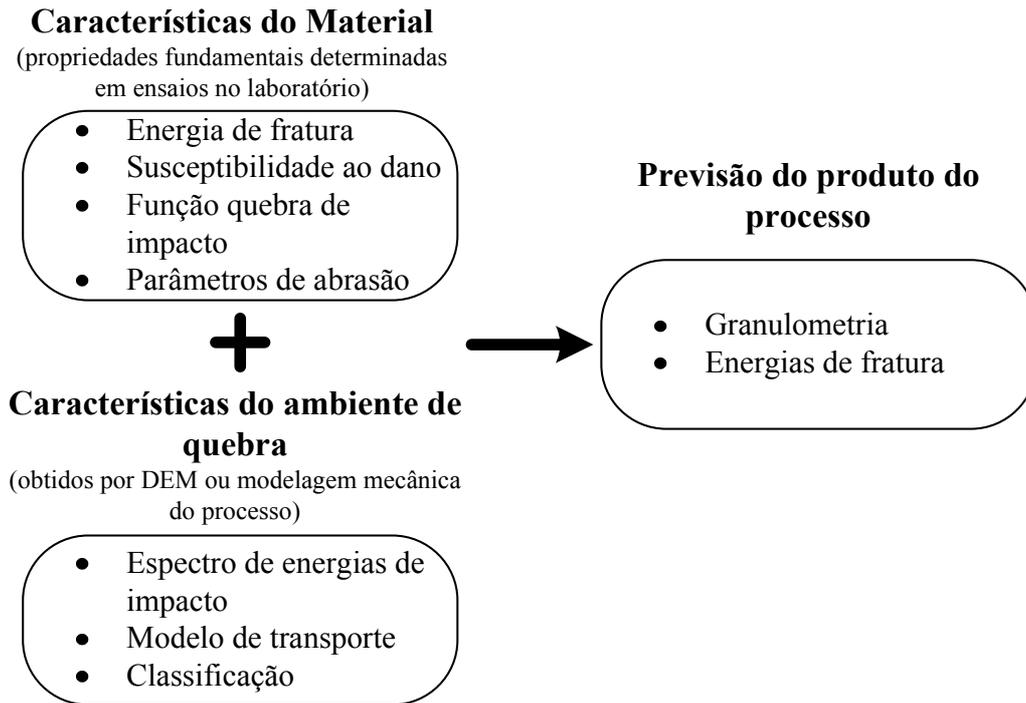


Figura III.1 - Esquema representativo do MGC.

III.1 - Formulação geral do modelo

O modelo generalizado da cominuição tem como base o modelo do balanço populacional já discretizado em classes de tamanhos. Esta primeira simplificação é importante no sentido de manter a modelagem coerente com a metodologia usual de medição de tamanhos de partícula, que normalmente é o peneiramento.

O MGC é também formulado de modo a considerar uma propriedade bastante importante, a classe mineralógica. Assim, é possível modelar processos que envolvem a quebra seletiva de diferentes minerais que compõem um material. Um exemplo é o caso do minério de ferro, composto por minerais de ferro, como a hematita e a magnetita, que tipicamente apresentam uma baixa resistência à quebra e por minerais de sílica como o quartzo que são relativamente resistentes. Assim, em um mesmo moinho para uma mesma energia aplicada, diferentes produtos são originados. Podendo se tornar um problema quando o processo operar em circuito fechado, pois o material mais grosso com um maior teor de sílica e menor susceptibilidade à quebra retornaria ao moinho, o que por sua vez poderia acarretar em uma menor eficiência do processo de cominuição.

O modelo processa cada colisão (impacto) individualmente, de forma que é necessário informar qual é o tipo de colisão envolvida, podendo ser esta do tipo corpo moedor impactando uma partícula, uma colisão autógena, partícula-partícula ou partícula revestimento (Figura III.2).

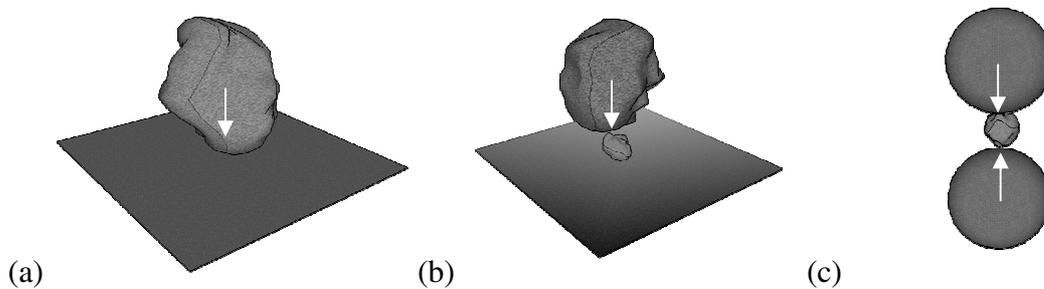


Figura III.2 - Exemplos de modos de impacto (a) Partícula-revestimento (b) Partícula-partícula e (c) Corpo moedor-partícula.

Os impactos do tipo corpo moedor-partícula podem ainda ser contra uma partícula contida em um leito de partículas e (ou) sobre o revestimento ou superfície do equipamento de cominuição. A Figura III.3 apresenta uma ilustração do caso em que um corpo moedor impacta um leito de partículas sobre um outro corpo moedor (Barrios e Tavares, 2009).

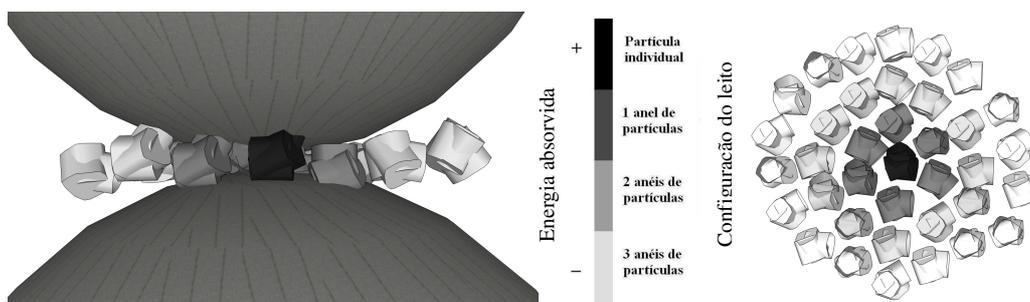


Figura III.3- Representação gráfica do impacto de um corpo moedor sobre um leito de partículas (Barrios e Tavares, 2009).

Quando o impacto envolve um leito de partículas, a energia de colisão é repartida entre as partículas capturadas no impacto. Esta situação será abordada mais à frente. A Tabela III.1 associa o mecanismo de quebra ao tipo de colisão e equipamento de cominuição.

Tabela III.1 - Mecanismos de quebra considerados no MGC e sua relevância em processos de cominuição (Carvalho e Tavares, 2009)

Mecanismo de quebra		Moinho de bolas	Moinho autógeno	Moinho semi-autógeno	Britador de impacto	Degradação por manuseio
	Corpo moedor-partícula	Sim	Não	Sim	Não	Não
Impacto (corpo)	Partícula-partícula	Não	Sim	Sim	Sim	Não
	Partícula-revestimento	Não	Sim	Sim	Sim	Sim
Abrasão (superficial)	-	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

A formulação geral apresentada pressupõe que o processo seja modelado por um reator de mistura perfeita, de forma que as propriedades do material (distribuição de tamanhos de partícula, composição mineralógica, energias de fratura, etc.) são iguais em qualquer ponto do equipamento. Sendo assim, pode-se escrever a equação geral do modelo, para um processo contínuo e dinâmico, como

$$\frac{d[w_{il}(t)M(t)]}{dt} = w_{il}^{in}(t)W^{in}(t) + \omega_k \sum_k [-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t)] - w_{il}^{out}(t)W^{out}(t)$$

(Eq. III.1)

sendo $w_{il}^{in}(t)$, $w_{il}(t)$, w_{il}^{out} as frações mássicas de material da classe de tamanho i e classe mineralógica l na corrente de alimentação, no interior do processo e na corrente de saída. $W^{in}(t)$ e $W^{out}(t)$ são as taxas de alimentação e descarga de material, ω_k é frequência de eventos de aplicação de energia da classe k no interior do equipamento (impactos), e os termos D_{ilk} e A_{ilk} representam as taxas de desaparecimento e aparecimento respectivamente. Os índices b e s se referem à quebra do corpo da partícula (por impacto) e à quebra superficial (por abrasão).

A proposta do modelo se baseia no fato que dado um evento de colisão, uma ou mais partículas da população total podem ser capturadas. A energia aplicada pelo impacto é então repartida entre as partículas capturadas que, por sua vez, podem quebrar ou não,

dependendo da distribuição de energias de fratura e da energia recebida individualmente. A fração que sofre a quebra (corpo) pode ou não deixar a classe de tamanho, sendo que o termo referente a esta quantidade é o elemento b_{ii} da função quebra. Já as partículas que são capturadas e não sofrem quebra por impacto, por terem sido impactadas por uma energia mais baixa, podem sofrer a quebra superficial pelo mecanismo de abrasão, de acordo com a taxa κ_{ij} . A Figura III.4 apresenta o esquema da seqüência de mecanismos para um evento de quebra.

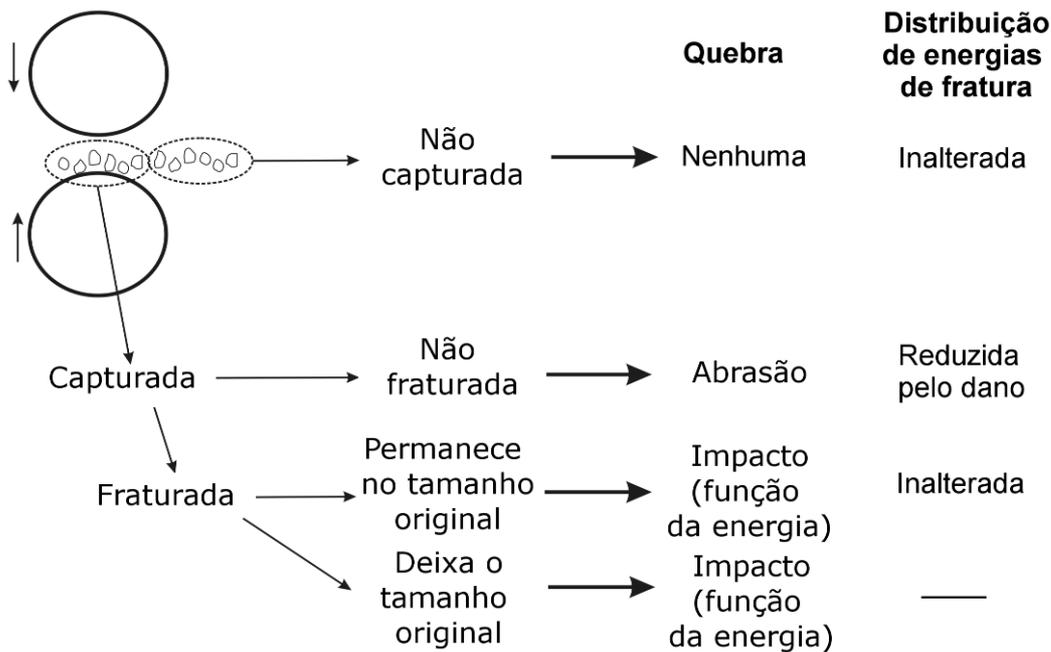


Figura III.4 - Seqüência de mecanismos para um evento de quebra.

As taxas de aparecimento e desaparecimento são calculadas para cada classe de tamanho i , mineralógica l e ao tipo de colisão k . As taxas de desaparecimento e aparecimento por impacto podem ser definidas, respectivamente, por:

$$D_{ilk}^b(t) = w_{il}(t) \int_0^{\infty} m_{ik}(E) p_k(E) \int_0^1 [1 - b_{ilk}(eE, t)] F_{il}(eE, t) p_k(e) de dE \quad (\text{Eq. III.2})$$

$$A_{ilk}^b(t) = \sum_{j=1}^{i-1} w_{jl}(t) \int_0^{\infty} m_{jk}(E) p_k(E) \int_0^1 b_{ijlk}(eE, t) F_{jl}(eE, t) p_k(e) de dE \quad (\text{Eq. III.3})$$

Nas equações das taxas de aparecimento e desaparecimento, $p_k(E)$ é a distribuição das energias de impacto E de classe k no equipamento. $m_{ik}(E)$ é a massa de partículas contidas na classe de tamanho i que são capturadas em cada evento de impacto relacionado a classe de colisão k e $p_k(e)$ é a função de repartição da energia de impacto entre estas partículas, a qual depende da classe de impacto k . A relação entre a massa de partículas capturadas e a repartição de energia aplicada em um impacto será discutida mais adiante.

b_{ijlk} é a fração mássica que uma partícula da classe mineralógica l de uma classe de tamanho j deixa na classe de tamanho i quando sofre quebra por impacto do tipo k de magnitude eE . F_{il} é a distribuição de energias de fratura das partículas na classe de tamanho i e classe mineralógica l naquele instante de tempo. Assim, $F_{il}(eE, t)$ é a proporção das partículas na classe il que quebram quando submetidas a uma energia de impacto eE .

Os termos referentes à quebra superficial pelo mecanismo de abrasão podem ser escritos como,

$$D_{ilk}^s(t) = w_{il}(t) \kappa_{il} \int_0^{\infty} m_{ik}(E) p_k(E) \int_0^1 [1 - F_{il}(eE, t)] p_k(e) de dE \quad (\text{Eq. III.4})$$

$$A_{ilk}^s(t) = \sum_{j=1}^{i-1} w_{jl}(t) \kappa_{jl} \int_0^{\infty} m_{jk}(E) p_k(E) \int_0^1 a_{ijl}(eE, t) [1 - F_{jl}(eE, t)] p_k(e) de dE \quad (\text{Eq. III.5})$$

no qual a_{ij} é a função quebra de abrasão na forma densidade e κ_j é a taxa de quebra por abrasão.

Conforme discutido anteriormente, pode-se dizer um material em uma determinada faixa de tamanho possui uma distribuição de energias de fratura ou probabilidades de quebra original. Quando partículas são originadas em um determinado tamanho provenientes da quebra de partículas maiores, estas novas partículas possuem uma distribuição de energias de fratura associada àquela original do minério naquela classe.

Após a contabilização de um ciclo de impactos, deve-se calcular a nova distribuição de energias de fratura do material em cada classe il . Isto é feito pelo balanço de massa e de

distribuição de energias de fratura antes e após o ciclo. A Figura III.5 ilustra o caso para um determinado material de uma classe de tamanho i e classe mineralógica l , no qual $F(E,t=0)$, $F(E,t)$, $F_d(E,t)$ e $F(E,t+\Delta t)$ são as distribuições de energias de fratura do material novo, do material no interior do processo de cominuição no instante de tempo t , do material que sofreu efeito do dano e do material após o ciclo de impactos no instante t , respectivamente.

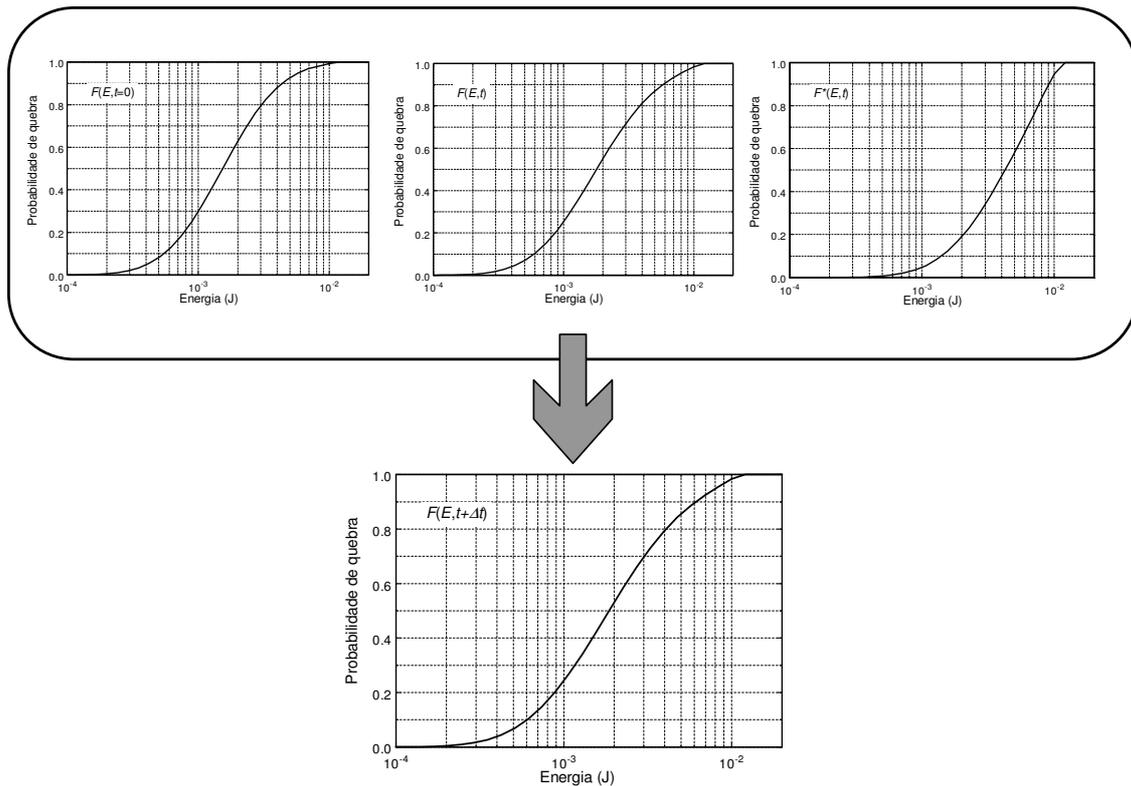


Figura III.5 - Ilustração do processo de composição da energia de fratura após um ciclo de eventos de quebra.

Assim, pode-se escrever uma equação geral para a distribuição de energias de fratura do material de cada classe após um ciclo de impactos,

$$F_{il}(E, t + dt) = \frac{G_{il}(t)F_{il}^*(E, t + dt) + (H_{il}(t) + Q_{il}(t))F(E, t = 0) + I_{il}(t)F_{il}(E, t)}{G_{il}(t) + I_{il}(t) + H_{il}(t) + Q_{il}(t)}$$

(Eq. III.6)

na qual a distribuição de energias de fratura do material original da classe il , $F_{il}(E,0)$, conforme dito anteriormente, é bem descrito pela distribuição log-normal truncada superiormente (Tavares e King, 2002) e que, considerando agora as classes de tamanho e mineralógica, é dada por,

$$F_{il}(E,0) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\ln E^* - \ln E_{50,il}}{\sqrt{2\sigma_{il}^2}} \right) \right] \quad (\text{Eq. III.7})$$

no qual,

$$E^* = \frac{E_{\max,il} E}{E_{\max,il} - E} \quad (\text{Eq. III.8})$$

e a equação que relaciona a dependência da mediana da distribuição de energias de fratura ($E_{50,il}$) é,

$$E_{50,il} = E_{\infty,l} \left[1 + \left(\frac{d_{o,l}}{d_i} \right)^{\phi_l} \right] \bar{m}_{p,il} \quad (\text{Eq. III.9})$$

na qual, para uma dada classe il e $\bar{m}_{p,il}$ é a massa de uma partícula na classe. Os parâmetros das Equações III.8 e III.9 (E_{\max} , ϕ , d_o e $E_{\infty,l}$) são funções apenas do material (classe l).

$F_{il}(E,t)$ também pode ser considerada como a distribuição de energias de fratura do material que não sofreu nenhum impacto naquele intervalo de tempo e $F_{il}^*(E,t)$ é a distribuição de energias de fratura de partículas que sofreram impacto, mas não quebraram, dado por,

$$F_{il}^*(E,t + \Delta t) = \frac{\int_0^{E_{il}^*} p_k(\varepsilon) \int_0^1 \left[\frac{F_{il} \left(\frac{E}{1-D}, t \right) - F_{il}(e\varepsilon, t)}{1 - F_{il}(e\varepsilon, t)} \right] p_k(e) de d\varepsilon}{\int_0^{E_{il}^*} p_k(\varepsilon) d\varepsilon} \quad (\text{Eq. III.10})$$

e,

$$D = \left[\frac{2\gamma_l(1-D)}{(2\gamma_l - 5D + 5)} \frac{e\mathcal{E}}{E} \right]^{\frac{2\gamma_l}{5}} \quad (\text{Eq. III.11})$$

Na qual E_{il}^* é a máxima energia de fratura das partículas contidas na classe il , que é igual à $E_{max,il}$ em $t=0$ e $F_{il}(E_{il}^*)=1$ conforme a cominuição progride. Deve-se notar que a Equação III.11 é uma versão modificada da forma convencional de cálculo do dano, Equação II.64.

Na Equação III.11, γ_l é o coeficiente de acúmulo do dano e é função do material processado (classe l), e D é o parâmetro de acúmulo do dano, que deve ser calculado a partir desta equação, utilizando-se algum método numérico. Uma solução única é encontrada com um pequeno número de iterações (Tavares, 2009).

O sistema de equações diferenciais gerado pela Equação III.1 deve ser resolvido juntamente com as equações de balanço das distribuições de energia de fratura de cada classe il (Equação III.6), de forma a contemplar a mudança na distribuição de energias de fratura das partículas de cada classe. Os termos Equação III.6 são definidos por,

$$\frac{dG_{il}(t)}{dt} = \sum_k \frac{\omega_k}{M(t)} w_{il}(t) (1 - \kappa_{il}) \int_0^\infty m_i(E) p_k(E) \int_0^1 [1 - F_{il}(eE_k, t)] p_k(e) de dE \quad (\text{Eq. III.12})$$

a qual é a fração de material na classe il que foi danificado mas permaneceu na classe de tamanho original, e

$$\frac{dH_{il}(t)}{dt} = \sum_k \frac{\omega_k}{M(t)} \left[\sum_{j=1}^i w_{jl}(t) \int_0^\infty m_j(E) p_k(E) \int_0^1 b_{ijkl}(eE, t) F_{jl}(eE, t) p_k(e) de dE + A_{ilk}^s(t) \right] \quad (\text{Eq. III.13})$$

a qual é a fração de material que apareceu devido a quebra (por impacto e por abrasão) das partículas maiores ou iguais ao tamanho da própria classe il , o termo $I_{il}(t)$

$$\frac{dI_{il}(t)}{dt} = \frac{w_{il}(t)}{M(t)} \left(\frac{M(t)}{dt} - \sum_k \omega_k \int_0^{\infty} m_{il}(E) p_k(E) dE \right) \quad (\text{Eq. III.14})$$

a qual é a fração de material da classe il que não foi capturada em cada intervalo de tempo dt , e

$$\frac{dQ_{il}(t)}{dt} = \frac{w_{il}^{in}(t) W^{in}(t)}{M(t)} \quad (\text{Eq. III.15})$$

a qual é a fração de material que entra no processo no intervalo de tempo dt .

As classes de impacto k são definidas em função dos elementos envolvidos nos choques. A fim de facilitar a análise dos tipos de colisões presentes no equipamento de cominuição é definida a Matriz de Colisões. Esta matriz correlaciona cada tipo de choque possível entre os diferentes elementos de impacto do processo, como por exemplos, corpos moedores de diferentes tamanhos, revestimento de moinhos e britadores e ainda diferentes partículas com tamanho suficiente para que sejam consideradas carga moedora autógena no caso de moinhos autógenos e semi-autógenos.

A construção da matriz de colisões é feita listando-se os possíveis contatos, e considerando que o contato de um elemento A com um elemento B é igual a um contato de B com A. Assim a matriz se torna uma matriz triangular inferior. No caso de um moinho de bolas que seja carregado com corpos moedores de dois tamanhos diferentes (CM_1 e CM_2), por exemplo, existirão quatro tipos de contato diferentes, conforme a Tabela III.2.

Cada elemento da matriz de colisões é um espectro de energias de impacto obtido por DEM daquele tipo de colisão. De acordo com o MGC pode-se definir as classes k de qualquer ordem, bastando contabilizar todos os tipos de colisões relevantes no equipamento de cominuição modelado. No exemplo do moinho de bolas acima, pode-se definir como mostra a Tabela III.3.

A partir do exemplo apresentado, fica implícito que é possível estabelecer uma equação para se determinar o número total (N_k) de classes de colisões em função do número de elementos que atuam como corpos moedores. Se N_{cm} é o número de tipos de corpos moedores, sejam eles autógenos ou não, e N_{rev} o número de revestimentos ou paredes

que podem ser considerados diferentes (exemplo: na degradação por manuseio, ocorrem impactos sobre leitos de partículas, superfícies de borracha ou aço), tem-se,

$$N_k = \frac{N_{cm}(N_{cm} - 1)}{2} + N_{cm}(1 + N_{rev}) \quad (\text{Eq. III.16})$$

Cada espectro de energias de impacto associado à classe de colisão k , quando integrado em relação à energia, por definição deve contabilizar 1, de maneira que,

$$\int_0^{\infty} p_k(E) dE = 1 \quad (\text{Eq. III.17})$$

Outra conclusão que pode ser obtida é que o somatório dos espectros de energias de cada classe de colisão k fornece o espectro de energias de impacto total do equipamento,

$$\frac{1}{\omega} \sum_k p_k(E) \omega_k = p(E) \quad (\text{Eq. III.18})$$

e a frequência total de colisões é definida por,

$$\sum_k \omega_k = \omega \quad (\text{Eq. III.19})$$

O algoritmo de solução da formulação geral do modelo, mostrando a seqüência de cálculos a serem realizados para a solução dinâmica e contínua para um único misturador perfeito é apresentado no Apêndice A.

Tabela III.2 - Matriz de colisões em um moinho de bolas

	CM_1	CM_2	Revestimento
CM_1	Sim	-	-
CM_2	Sim	Sim	-
Revestimento	Sim	Sim	-

Tabela III.3 - Classe de colisões e tipo de colisão associado

Classe de colisões (k)	Tipo de colisões
1	$CM_1 - CM_1$
2	$CM_1 - CM_2$
3	$CM_1 - \text{Revestimento}$
4	$CM_2 - CM_2$
5	$CM_2 - \text{Revestimento}$

IV - RESULTADOS E DISCUSSÃO

O primeiro caso estudado é o produto do impacto individual de partículas submetidas à queda de um peso esférico, simulando um choque corpo moedor-partícula. Em seguida é apresentado o caso em que partículas são soltas de uma determinada altura por repetidas vezes, com o objetivo de simular as operações de manuseio e transporte de minérios, como por exemplo, aqueles ocorridos da mina até o porto.

Posteriormente o modelo é formulado para o caso da moagem de bolas em batelada e, em seguida, contínua. Um modelo idealizado para a moagem semi-autógena é apresentado.

O último caso formulado é de um processo de britagem idealizado representado por ciclos de classificação e quebra, como aquele desenvolvido por Whiten (1972), embora agora seja utilizada os modelos de quebra segundo o MGC.

IV.1 - Modelagem do único evento de impacto

Uma aplicação simples do modelo que já é capaz de mostrar o seu potencial na descrição em microescala da quebra, é a quebra partículas a partir de um único evento de impacto. Neste caso uma única partícula ou um leito de partículas é posicionado sobre uma superfície plana de aço e é submetido ao impacto pela queda de um corpo moedor esférico. Desta forma, é possível relacionar a intensidade de quebra com o nível energético aplicado e, inclusive, levantar questões sobre como a repartição de energia ocorre em um leito de partículas.

Da equação geral (Equação III.1) em função do tempo tem-se,

$$M(t) \frac{dw_{il}(t)}{dt} + w_{il}(t) \frac{dM(t)}{dt} = w_{il}^{in}(t) W^{in}(t) + \omega_k \sum_k \left[-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t) \right] - w_{il}^{out}(t) W^{out}(t) \quad (\text{Eq. IV.1})$$

Como não há entrada nem saída de material do processo, a massa de partículas é constante, de maneira que a equação se torna,

$$M \frac{dw_{il}(t)}{dt} = \omega_k \sum_k \left[-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t) \right] \quad (\text{Eq. IV.2})$$

No caso de eventos discretos no tempo, é necessário resolver a equação diferencial em função de um intervalo de tempo Δt .

$$M \frac{w_{il}(t + \Delta t) - w_{il}(t)}{\Delta t} = \omega_k \sum_k \left[-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t) \right] \quad (\text{Eq. IV.3})$$

considerando intervalos de tempo finitos Δt , a Equação IV.3 se torna,

$$w_{il}(t + \Delta t) - w_{il}(t) = \frac{\omega_k \sum_k \left[-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t) \right]}{M} \Delta t \quad (\text{Eq. IV.4})$$

e, finalmente:

$$w_{il}(t + \Delta t) = w_{il}(t) + \frac{\omega_k \sum_k \left[-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t) \right]}{M} \quad (\text{Eq. IV.5})$$

No caso de eventos de impactos discretos (ciclos de quebra m), pode-se reescrever a equação,

$$w_{il}^{(m+1)} = w_{il}^{(m)} + \frac{\sum_k \left[-D_{ilk}^{b(m)} - D_{ilk}^{s(m)} + A_{ilk}^{b(m)} + A_{ilk}^{s(m)} \right]}{M} \quad (\text{Eq. IV.6})$$

Tendo sido desenvolvida a equação do balanço de massas do modelo para este caso, uma análise deve ser feita a respeito da determinação da massa capturada em cada evento.

A repartição de energia em leitos de partículas, que ocupa uma posição de destaque na modelagem de diversos sistemas de interesse, é objeto de estudo em andamento no Laboratório de Tecnologia Mineral. Uma dissertação de mestrado está sendo preparada (Barrios, 2009) de forma a preencher as lacunas deixadas na literatura e é esperado que seja estabelecida uma forma funcional validada por experimentos para a repartição de energia e também determinado como é influenciada por algumas variáveis, como:

tamanho do corpo moedor, tipo de superfície, tamanho de partícula, energia de impacto e tipo de configuração do leito.

Para isto utilizou-se o MGC de modo a simular os resultados obtidos por Bourgeois (1993), que conforme citado no Capítulo II -, investigou o impacto de corpos moedores sobre leitos de partículas. Nos ensaios realizados por Bourgeois, partículas de quartzo foram impactadas individualmente e em diferentes configurações de leitos, variando-se o número de anéis ao redor da partícula central, até formar uma monocamada, como no mostrado no exemplo da Figura III.3.

Embora a função $p(e)$ que descreve a repartição de energias de impacto entre as partículas capturadas em um impacto ainda seja objeto de estudos, uma hipótese razoável é considerar que a energia é repartida igualmente dentre aquelas partículas capturadas. Nessa hipótese, $p(e)$ independe do tamanho do corpo moedor, da energia aplicada, e da configuração do leito, sendo dada por,

$$p(e) = \delta\left(e - \frac{1}{N_{cap,il}}\right) \quad (\text{Eq. IV.7})$$

Na qual a função $p(e)$ assume a forma da função delta Dirac e $N_{cap,il}$ é o número de partículas da classe il que são capturadas no evento de impacto.

O número de partículas capturadas pode ser determinado, por sua vez, a partir da geometria, considerando-se que quanto menor o tamanho de partícula em relação ao tamanho do corpo moedor, maior será o seu número capturado. Isto pode ser estimado a partir de uma relação do tipo,

$$N_{cap,il} = 1 + a_e \left(\frac{d_b}{d_i}\right)^{b_e} \quad (\text{Eq. IV. 8})$$

na qual os parâmetros a_e e b_e devem ser ajustados aos dados experimentais. A partir desta relação pode-se calcular a massa capturada em cada colisão ($m_{il}(t)$) como,

$$m_{il} = N_{cap,il} \bar{m}_{p,il} \quad (\text{Eq. IV.9})$$

Bourgeois (1993) impactou partículas de quartzo pela queda de um peso esférico para diferentes configurações de leitos, determinando também o número de partículas que foram capturadas em cada configuração. O MGC foi utilizado para simular alguns dos resultados obtidos por Bourgeois.

Neste caso, obviamente não são necessárias simulações pelo método dos elementos discretos para o cálculo da energia de impacto. A Figura IV.1 apresenta o resultado experimental obtido por Bourgeois e os resultados simulados utilizando o modelo generalizado da cominuição já na forma da Equação IV.6. Pode-se se notar que o modelo descreveu adequadamente os resultados experimentais, tanto para o impacto sobre uma única partícula quanto para o impacto sobre diferentes leitos. A Tabela IV.2 mostra a lista de parâmetros do MGC utilizados nestas simulações.

Tabela IV.1 - Configuração do leito sua correlação com o número de partículas capturadas para o ensaio apresentado na Figura IV.1 (Barrios e Tavares, 2009)

Configuração do leito	Nº. de partículas do leito	Nº. de partículas capturadas
1 anel	7	7
2 anéis	19	10
Monocamada	91	10

Tabela IV.2 - Lista de parâmetros do MGC para o quartzo, utilizados na simulação dos ensaios de quebra realizados por Bourgeois (1993)

Energia de Fratura			Função quebra		
σ	0,598	J/kg	A	38,8	%
E_{∞}	43,4	J/kg	b'	0,0176	-
d_o	3,48	mm	n	α_n	β_n
ϕ	1,61	-	1,2	0,01	5,24
Massa específica			1,5	0,20	3,11
ρ	2650	kg/m ³	2	0,49	2,68
Diâmetro da bola			4	0,74	1,41
d_b	80	mm	25	1,17	0,58
			50	1,35	0,40
			75	1,39	0,30

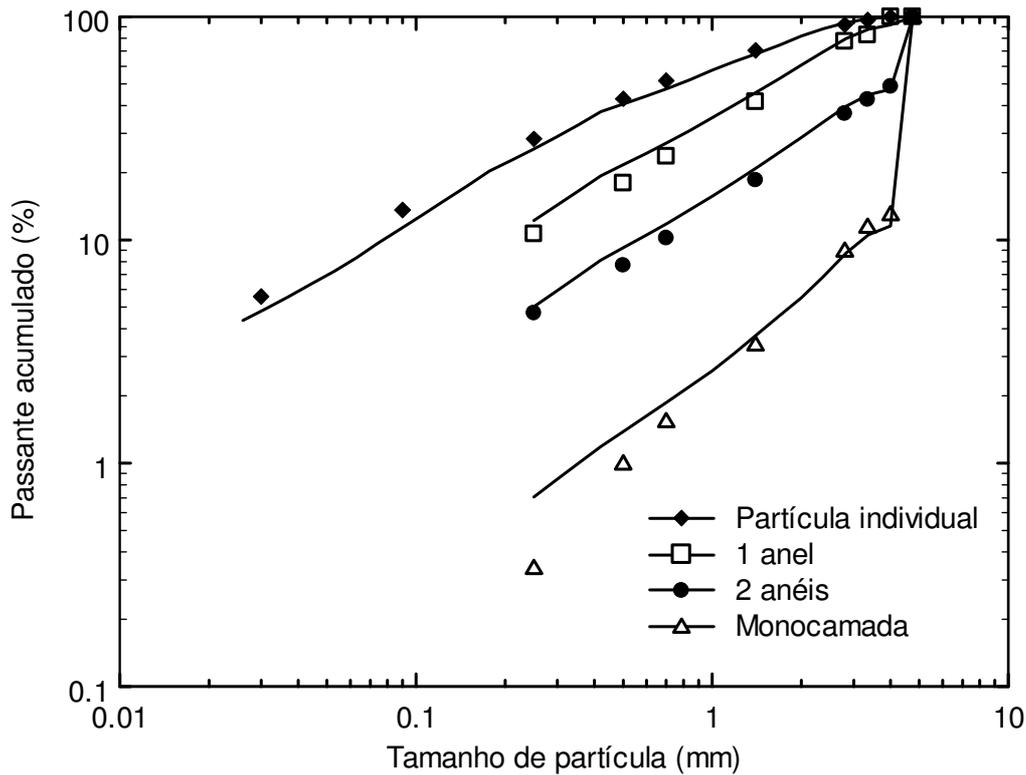


Figura IV.1 – Simulação (linhas sólidas), utilizando o MGC, da quebra de partículas de quartzo individuais e em leitos comparados aos dados experimentais (símbolos) obtidos por Bourgeois (1993).

IV.2 - Simulação da degradação por manuseio

Um caso particular da modelagem da cominuição para processos com eventos considerados discretos é o estudo da degradação de materiais pelo manuseio. A degradação dos materiais granulados ocorre inadvertidamente durante os processos de transporte e transferência, como, por exemplo, o transporte de pelotas de minério de ferro da usina até o porto e do porto até o cliente final. Nestes casos, os contratos normalmente estabelecem uma proporção máxima de material de granulometria fina limite (normalmente a percentagem menor que 12,5 mm). Como no presente momento não existem modelos capazes de prever com precisão a fração degradada no manuseio, é esperado que a aplicação direta do modelo generalizado da cominuição permita a previsão acurada de resultados neste tipo de processo. A partir desse seria possível manipular as etapas anteriores ao manuseio, de forma a produzir um produto com determinada granulometria sabendo-se de antemão qual seria a proporção de finos deste ao passar por todas as etapas de manuseio que causam a degradação. A Figura IV.2

apresenta um exemplo hipotético do transporte de um minério da usina até o porto para o carregamento do navio.

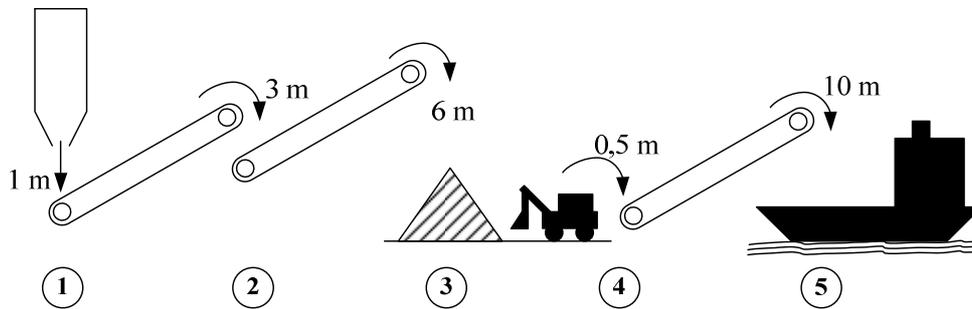


Figura IV.2 - Exemplo de transporte de minérios da usina até um navio com as alturas de queda em cada transferência.

Sabe-se que o nível de quebra das partículas sobre uma superfície depende de seu tipo, por exemplo, podendo ser de borracha, aço ou até mesmo de outras partículas de minério. O efeito da superfície sobre as quais as partículas são impactadas pode ser estimado a partir da teoria de contato de Hertz, que considerando um impacto elástico (Tavares, 2004),

$$e = \left(\frac{k_{\text{superfície}}}{k_{\text{superfície}} + k_p} \right) \left(\frac{k_{\text{aço}} + k_p}{k_{\text{aço}}} \right) \quad (\text{Eq. IV.10})$$

na qual $k_{\text{aço}}$ é a rigidez do aço (em torno de 230 GPa) usada na medida das propriedades de quebra do material em laboratório, k_p é a rigidez da partícula e $k_{\text{superfície}}$ é a rigidez da superfície de impacto, que pode ser por exemplo, de aço, borracha ou de partículas do próprio minério. O parâmetro e é o parâmetro de repartição de energia, podendo significar também a fração da energia aplicada que é efetivamente absorvida pelas partículas. No caso do impacto autógeno (sobre outras partículas) a Equação III.30 se torna,

$$e = 0,5 \left(\frac{k_{\text{aço}} + k_p}{k_{\text{aço}}} \right) \quad (\text{Eq. IV.11})$$

O modelo matemático para a degradação com seguidos eventos de quebra pode ser obtido diretamente da Equação III.25. Assim, em um primeiro momento, simulou-se um ensaio de impactos autógenos sob condições controladas. Neste ensaio, partículas de minério de ferro contidas na faixa de tamanhos de 125 x 63 mm são soltas uma a uma de uma altura fixa contra uma placa de aço. Ao final de cada impacto os fragmentos gerados foram peneirados de forma a se obter a análise granulométrica. A Figura IV.3 compara os resultados experimentais aos simulados. Nota-se a boa correspondência entre os resultados experimentais e a simulação, mesmo para diferentes números de impactos totais.

A sensibilidade do modelo ao efeito da superfície de impacto é ilustrada na Figura IV.4, que mostra a proporção de material fino ($-6,4\text{ mm}$) gerada após cada impacto. As simulações são comparadas aos resultados obtidos experimentalmente.

Foi também realizada uma simulação da degradação de um minério de ferro quando partículas inicialmente contidas na faixa 125 x 63 mm são transportadas através do fluxograma hipotético apresentado na Figura IV.2, sofrendo, portanto, quedas das alturas indicadas no fluxograma. A Tabela IV.3 mostra os resultados da simulação e a Tabela IV.4 apresenta os parâmetros do material que foram utilizados no MGC.

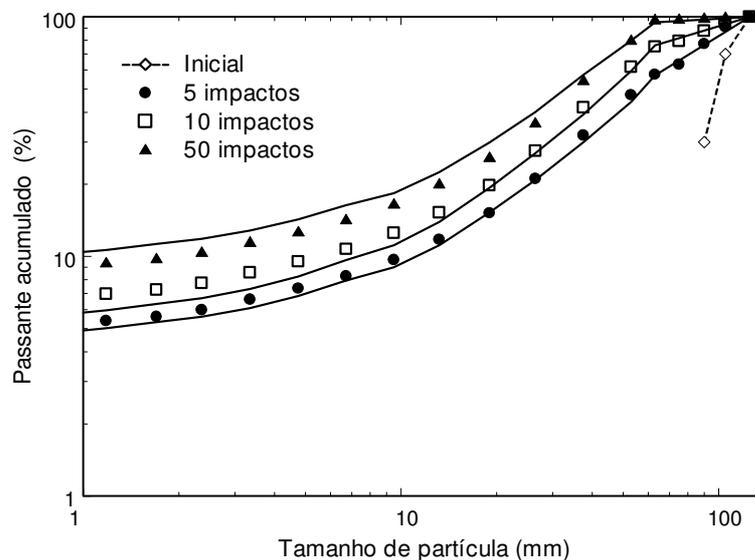


Figura IV.3 - Resultados experimentais (símbolos) e simulados (linhas) mostrando as distribuições de tamanhos de partículas após repetidas quedas de partículas de minério de ferro na faixa de tamanho 125 x 63 mm contra uma superfície de aço de uma altura de 4 metros.

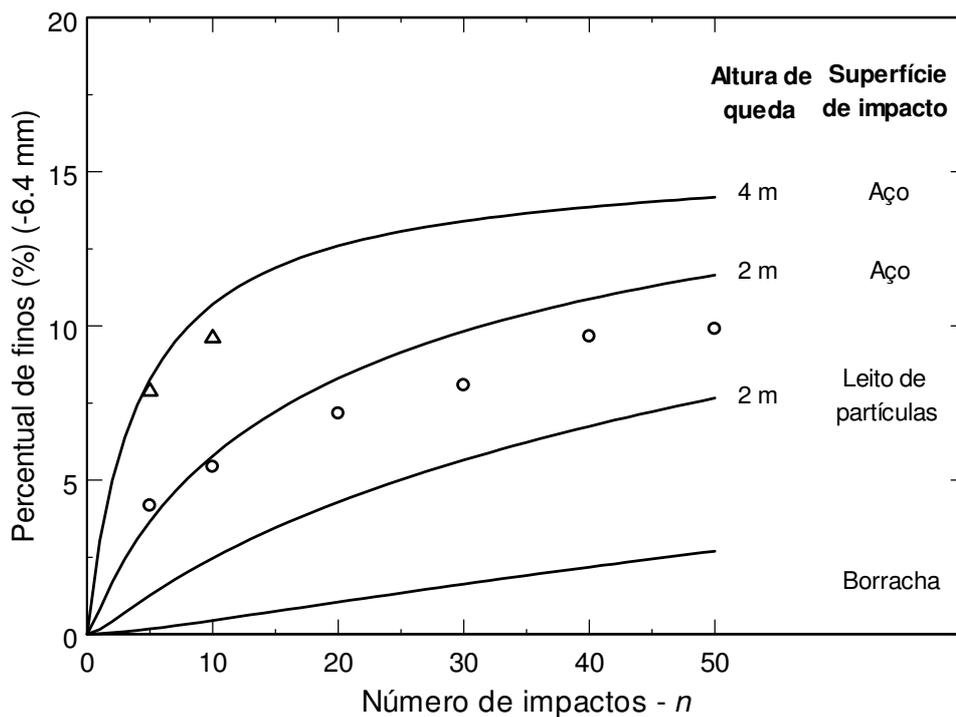


Figura IV.4 - Resultados experimentais (símbolos) e simulados (linhas) mostrando a proporção de material fino gerado (-6,4 mm) após quedas livres a partir de duas alturas diferentes de partículas de minério de ferro contidas na faixa de 125 x 63 mm. Simulações para a queda de uma altura de 2 metros também são mostradas para impactos contra outras superfícies.

Tabela IV.3 - Resultados da simulação do transporte de acordo com o fluxograma hipotético da Figura IV.2

Nº do evento de quebra	Altura da queda (m)	Altura total de queda (m)	Proporção de finos gerada (-6,4 mm) (%)
1	1	1	0,0
2	3	4	0,6
3	6	10	2,6
4	0,5	10,5	2,7
5	10	20,5	5,7

Tabela IV.4 - Parâmetros do minério de ferro

Energia de fratura		Parâmetros da abrasão		
σ (-)	0,75	P_a (%)	14,5	
E_{∞} (J/kg)	47,3	D_a (mm)	0,20	
d_o (mm)	1,08	λ_a (-)	0,30	
ϕ (-)	2,3	Dados da função beta incompleta		
Massa específica		n	α_n	β_n
ρ (kg/m ³)	4260	1,2	0,73	8,86
Parâmetros da função quebra		1,5	1,00	7,87
A (%)	65,4	2	0,85	4,04
b' (-)	0,093	4	1,05	2,14
Coeficiente de acúmulo de dano		25	1,00	0,71
γ (-)	4,8	50	1,03	0,64
		75	1,01	0,58

Tavares e Carvalho (2008) modelaram a degradação de minério de ferro no manuseio e transporte utilizando o MGC e verificaram, via simulação, fenômenos identificados na indústria durante essas operações. Foi possível descrever a influência da ordem das quedas das partículas de diferentes alturas, de modo que a degradação mais intensa ocorre quando as quedas de maior energia acontecem no início do transporte. Outro fenômeno previsto foi a “estabilização”, no qual partículas que não se degradam se tornam progressivamente mais resistentes conforme vão sofrendo repetidas quedas.

IV.3 - Modelagem da moagem em batelada em escala de laboratório

Uma aplicação importante do MGC é a modelagem matemática dos moinhos tubulares como os moinhos de bolas, autógenos e semi-autógenos. Ensaio de moagem em batelada utilizando moinho de bolas têm grande importância na validação e retro-cálculo dos parâmetros dos modelos matemáticos baseados no modelo do balanço populacional clássico (Austin *et al.*, 1984; Herbst e Fuerstenau, 1980). Em virtude do vasto conhecimento sobre este moinho, optou-se neste trabalho utilizá-lo como principal indicador do desempenho do modelo generalizado da cominuição na previsão do resultado de moagem que, por sua vez, auxiliará na identificação das principais vantagens e limitações da futura aplicação do MGC na descrição de moinhos industriais.

Para a moagem descontínua ($M = \text{constante}$, $W^{in} = W^{out} = 0$) de um minério de um único componente mineralógico e com o moinho carregado com corpos moedores de um mesmo diâmetro, de forma que o único tipo de colisão relevante à quebra é o do tipo bola-bola ($N_k = 1$), a Equação III.1 se torna,

$$\frac{dw_{il}(t)}{dt} = \frac{\omega}{M} [-D_{il}^b(t) - D_{il}^s(t) + A_{il}^b(t) + A_{il}^s(t)] \quad (\text{Eq. IV.12})$$

Estabelecida a equação do MGC para o caso da moagem em batelada de um minério caracterizado pela presença de um único componente, deve-se alimentar o modelo com informações sobre o material. Feito isso, bastará descrever o ambiente de moagem que, neste caso, corresponde ao espectro de energias de impacto obtido pela simulação do movimento da carga utilizando método dos elementos discretos. O DEM utiliza parâmetros que devem ser calibrados em função da condição operacional do moinho. A determinação destes parâmetros e a sensibilidade do DEM são discutidas à seguir.

IV.3.1 - Estudo de parâmetros e sensibilidade do modelo ao espectro de energias de impacto fornecido pelo DEM no caso da moagem em batelada

Para a validação inicial do modelo em escala de laboratório o estudo de caso baseado na moagem descontínua é uma ótima escolha, pois permite testar todo o equacionamento do modelo sob condições controladas e com relativa facilidade de verificação experimental.

Uma investigação relevante nesse contexto é a avaliação da sensibilidade do espectro de energias de impacto obtido por DEM em função dos parâmetros que o método exige na simulação, que são os coeficientes de restituição (normal e tangencial) e os coeficientes de atrito (estático e de rolamento). Estes parâmetros são de difícil determinação experimental (Mishra e Murty, 2001) e, portanto, necessitam ser escolhidos a partir de alguma informação indireta. No caso dos moinhos de bolas, esta validação é normalmente realizada por meio de ensaios de moagem sob condições controladas de modo que é possível calcular a potência demandada a partir da medida direta do torque no eixo do moinho, para movimentar a carga moedora durante a operação. Para um conjunto de parâmetros, simula-se este moinho pelo DEM, e, integrando-se os espectros de energias de impacto normal e tangencial obtém-se um valor de potência. Este valor obtido é comparado com aquele determinado experimentalmente, o que torna possível avaliar a correspondência dos parâmetros à realidade daquela condição de moagem.

Um bom exemplo a ser citado é a influência do coeficiente de restituição na simulação do movimento da carga moedora em um moinho de bolas. Um coeficiente de restituição baixo (próximo de zero) significa que os corpos moedores ao se chocar não são rebatidos, o que seria o equivalente ao amortecimento quase que total. Condição que na operação real ocorreria em um moinho com alto preenchimento de vazios, ou seja, elevado *hold-up* de sólidos. Um alto coeficiente de restituição (próximo de um) significa que os corpos moedores ricocheteariam quase que até a sua altura original no caso de uma colisão normal. Esta condição em um moinho real dificilmente seria alcançada, mas poderia ser ilustrada como sendo equivalente a impactos de corpos moedores de borracha em um moinho com baixo preenchimento de vazios que se movimentasse no regime de catarata.

No presente estudo considerou-se o mesmo valor para os coeficientes de restituição normal e tangencial. Com o objetivo de verificar qual conjunto de parâmetros aproxima a simulação por DEM de uma condição de operação real, diversas simulações foram realizadas. A Tabela IV.5 lista cada condição considerada nas simulações por DEM realizadas. De cada simulação, calculou-se a potência dissipada e comparou-se o valor obtido com um dado de potência para o mesmo moinho.

O moinho considerado possui diâmetro e comprimento iguais a 30 cm e é dotado de quatro barras elevadoras de 7 mm de altura. O moinho opera com 30 % de grau de

enchimento, preenchimento de vazios de 100 % e velocidade de 54 rpm. O moinho possui 467 corpos moedores de aço esféricos com diâmetro de 25 mm. A Figura IV.5 apresenta uma foto do moinho utilizado e a sua simulação em DEM para o caso 1.

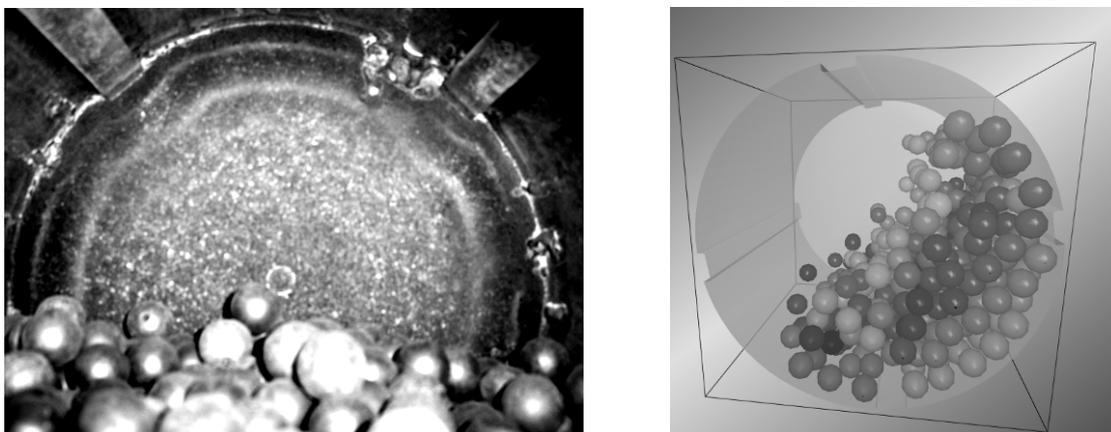


Figura IV.5 - Foto do interior do moinho de bolas de laboratório (30 x 30 cm e corpos moedores de aço de 25 mm de diâmetro) utilizado nos ensaios de validação e ilustração do mesmo moinho implementado no software EDEM®.

A potência obtida da simulação por DEM pode ser obtida da integração do espectro de energias de impacto (Figura II.18). A potência foi calculada para cada caso da Tabela IV.5, os resultados são mostrados na Tabela IV.6.

A potência dissipada pelo moinho real nas condições é de aproximadamente 152 W, valor que foi obtido com auxílio de um sensor de torque acoplado ao eixo do moinho. Indicando que o conjunto de parâmetros do caso 1 e do caso 10 foram os que mais se aproximaram da condição real. Desta forma, escolheu-se o conjunto de parâmetros do caso 1, para qual o espectro de energias de impacto gerado foi utilizado nas simulações da moagem em batelada com intuito de demonstrar a validação do MGC.

Como o DEM registra todas as colisões entre os elementos dentro de um volume de controle, é esperado que colisões de muito baixa energia de contato sejam registradas. Na prática, estas colisões não possuem magnitude suficientemente alta que causem qualquer efeito, seja ele a quebra ou o enfraquecimento de partículas.

Tabela IV.5 - Listagem das simulações por DEM do moinho descontínuo de

Caso	Coefficiente de restituição (c)	Coefficiente de atrito estático (μ_s)	Coefficiente de atrito de rolamento (μ_r)	Nº total de colisões normais por segundo – ω (colisões/segundo)	Mediana do espectro de energias de impacto (J)
1	0,50	0,50	0,01	436.970	0,105
2	0,25	0,50	0,01	367.190	0,161
3	0,01	0,50	0,01	259.870	0,294
4	0,50	0,75	0,01	810.310	0,127
5	0,25	0,75	0,01	335.400	0,203
6	0,01	0,75	0,01	241.300	0,375
7	0,50	0,99	0,01	391.570	0,141
8	0,25	0,99	0,01	327.240	0,222
9	0,01	0,99	0,01	240.900	0,412
10	0,50	0,50	0,02	434.160	0,105

Tabela IV.6 - Potência calculada para as simulações DEM do moinho operando em batelada

Caso	Potência em Watts calculada considerando truncamento em 10^{-4} J	Frequência de colisões normais na distribuição truncada ω (colisões/s)
1	164,7	222.250
2	223,4	216.410
3	307,2	178.960
4	332,6	443.510
5	232,6	211.950
6	321,4	175.500
7	172,9	222.370
8	236,7	211.990
9	326,7	179.310
10	164,7	221.120

Nas simulações é conveniente ajustar a distribuição de energias de impacto por meio de uma função contínua que a descreva precisamente usando um conjunto mínimo de parâmetros. Dessa forma foi proposta a utilização de uma função de Rosin-Ramler truncada inferiormente, dada por,

$$P(E) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{E - E_{min}}{E_P} \right)^\eta \right] \quad (\text{Eq. IV.13})$$

na qual E_{min} é o valor de energia que corresponde ao truncamento inferior da distribuição de energias de impacto, enquanto E_P e η são parâmetros de ajuste da equação e $p(E) = dP(E)/dE$.

Diante deste cenário, estudou-se qual o valor de E_{min} a ser utilizado no truncamento do espectro de energias de forma a não alterar significativamente o valor da potência dissipada no moinho. A grande vantagem do truncamento é a possibilidade de se obter reduções em esforço computacional, pois, desta forma, não é necessário calcular a quebra para situações no qual a energia de impacto é tão baixa que se torna irrelevante.

A Figura IV.6 mostra valores de potência calculados para o espectro de energias de impacto com diferentes valores de truncamento (E_{min}) para o caso 1. Para os espectros de energia com truncamento acima de $2,0 \cdot 10^{-4}$ J a diferença na potência em relação à potência calculada sem efeito do truncamento é superior a 9%, chegando a 54,2% no caso do truncamento em $1,6 \cdot 10^{-3}$ J. Para manter o desempenho computacional das simulações satisfatório e manter a correlação com a potência dissipada, foi adotado o valor para a energia de truncamento igual a $1,0 \cdot 10^{-4}$ J, sendo que este valor difere da potência original calculada sem o truncamento em apenas 3,84 %. Na verdade, este valor de energia corresponde em um impacto de um corpo moedor de 25 mm de diâmetro caindo de uma distância de apenas 0,2 mm. Pesquisadores como, Powell *et al.*, (2008), citam valores nesta ordem de grandeza para o truncamento do espectro de energias de impacto.

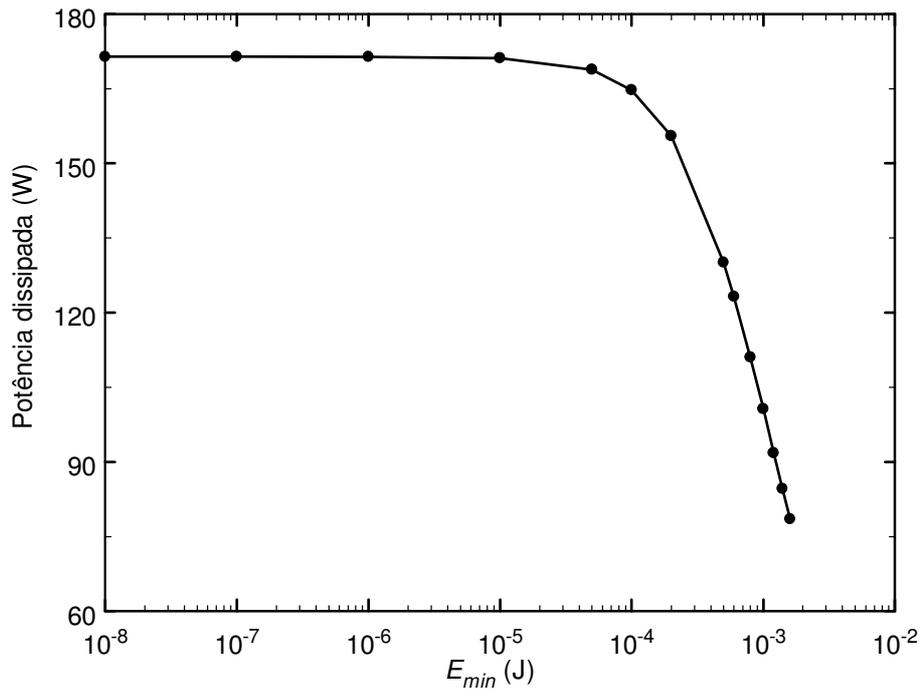


Figura IV.6 - Potência dissipada em função da energia de truncamento inferior do espectro de energias de impacto para o caso 1.

IV.3.2 - Simulações da moagem em batelada

Uma vez que o espectro de energias de impacto foi estudado e determinado para este problema, é possível simular o resultado da moagem. As condições operacionais do moinho de bolas descontínuo simuladas são listadas na Tabela IV.7. Os parâmetros utilizados na simulação por DEM que gerou o espectro de energia de impacto que alimenta as simulações da moagem descontínua são mostrados na Tabela IV.8.

No presente momento, a hipótese para a captura das partículas é baseada na relação dada pela Equação IV.8 cujos parâmetros a_e e b_e foram estimados via retro-cálculo a partir da simulação das taxas de quebra na moagem em batelada de um granulito. Os valores obtidos para a relação de captura de partícula que melhor ajustaram-se aos dados experimentais foram, $a_e = 0,0021$ e $b_e = 1,7$, o que equivale a captura de uma única partícula de tamanho médio de 8 milímetros ou 47 partículas medindo 63 micrometros para uma bola medindo 25 mm de diâmetro. Nestas simulações a energia de impacto é repartida igualmente entre as partículas do leito que são capturadas, desta forma a função $p(e)$ assume a forma do delta Dirac como mostrado na Equação IV.7.

Tabela IV.7- Condições operacionais do moinho de bolas descontínuo de laboratório utilizado nas simulações da moagem descontínua

Moinho	
Diâmetro (m)	0,30
Comprimento (m)	0,30
Frequência de rotações (rpm)	54
Fração da velocidade crítica (%)	0,67
Grau de preenchimento de vazios (%)	100
Ambiente de moagem	Seco
Corpos moedores	
Tipo de corpos moedores	Aço
Massa específica (kg/m ³)	7800
Diâmetro das bolas, d_b (mm)	25
Grau de enchimento do moinho (%)	30
Massa dos corpos moedores (kg)	30

Tabela IV.8 - Parâmetros da simulação do moinho pelo método dos elementos discretos no software EDEM[®] utilizando o modelo de Hertz-Mindlin (sem escorregamento)

Parâmetros do material (aço)	
Razão de Poisson (ν)	0,3
Modo de elasticidade (Y)	$7 \cdot 10^{10}$ Pa
Massa específica das bolas (ρ)	7800 kg/m ³
Parâmetros do contato bola-bola	
Coefficiente de restituição (c)	0,5
Coefficiente de atrito estático (μ_s)	0,5
Coefficiente de atrito de rolamento (μ_r)	0,01

Nos ensaios de moagem em batelada utilizados para validar e demonstrar a aplicação do MGC, utilizou-se o moinho de 30 x 30 cm já descrito anteriormente neste capítulo, preenchido com uma quantidade de corpos moedores de aço de forma a ocupar 30 % do volume interno. Uma amostra de minério composta por partículas contidas em uma faixa estreita de tamanho, chamada de monotamanho, é então adicionada ao moinho. É

realizada a moagem do material por um período de tempo determinado, esvaziando-se o moinho em seguida para análise granulométrica de uma alíquota do minério remanescente do moinho. Após a análise, o material é novamente alimentado ao moinho repetindo a moagem por outro período de tempo. Desta forma é possível acompanhar na moagem em batelada a evolução da granulometria dos materiais ao longo do tempo.

Em uma primeira aplicação do modelo, utilizou-se o MGC na previsão das taxas de quebra de ordem maior que um que comumente aparecem na cominuição de materiais grosseiros (+4,75 mm) em moinhos de bolas. A Figura IV.7 e a Figura IV.8 apresentam a proporção remanescente de material na classe original de tamanhos em função do tempo para dois minérios diferentes.

A partir destes resultados nota-se que embora as simulações tenham representado bem a tendência das taxas de quebra faz-se necessário ressaltar que uma das limitações do modelo é a determinação da energia de fratura de partículas menores que 0,8 mm. Diante desta incerteza nos valores das energias de fratura para a faixa fina de material, os dados determinados a partir de ensaios de quebra na célula de carga de impacto foram extrapolados utilizando a relação estabelecida para tamanhos mais grossos (Equação III.9), cujos dados experimentais são apresentados na Figura IV.9.

A análise dos resultados das taxas de quebra mostra que o modelo foi capaz de descrever taxas de quebra de ordem diferente de um, que aparecem principalmente na quebra de partículas mais grossas neste tipo de moinho. Este tipo de comportamento na moagem não pode ser descrito utilizando-se os modelos tradicionais de segunda geração baseados no modelo do balanço populacional.

A cinética de quebra de ordem diferente de um na simulação pode ser explicada pelas mudanças que ocorrem nas propriedades de quebra das partículas no decorrer o processo. A Figura IV.10 mostra uma comparação entre o espectro de energias de impacto para o caso 1 e ajustado usando a função de Rosin-Rammler ($E_{\min} = 10^{-4}$ J, $E_p = 4 \cdot 10^{-4}$ J e $\eta = 0,77$) e a condição inicial em que as partículas em cada classe possuem uma distribuição de energias de fratura (ou probabilidade de quebra) $F(E,0)$.

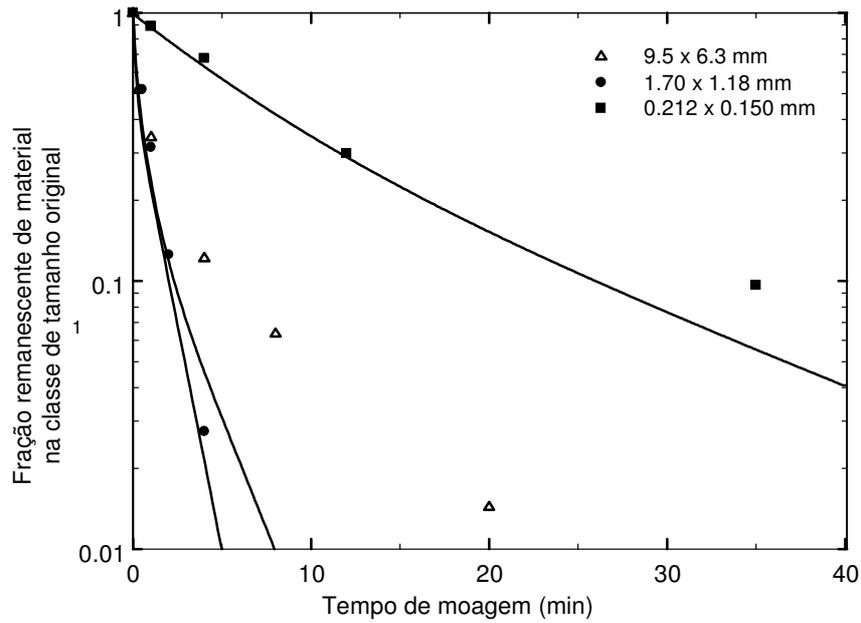


Figura IV.7 -Proporção remanescente na classe original de tamanho em função do tempo na moagem descontínua de um minério de calcário. Os pontos são os dados experimentais e as linhas são os dados simulados utilizando o modelo generalizado.

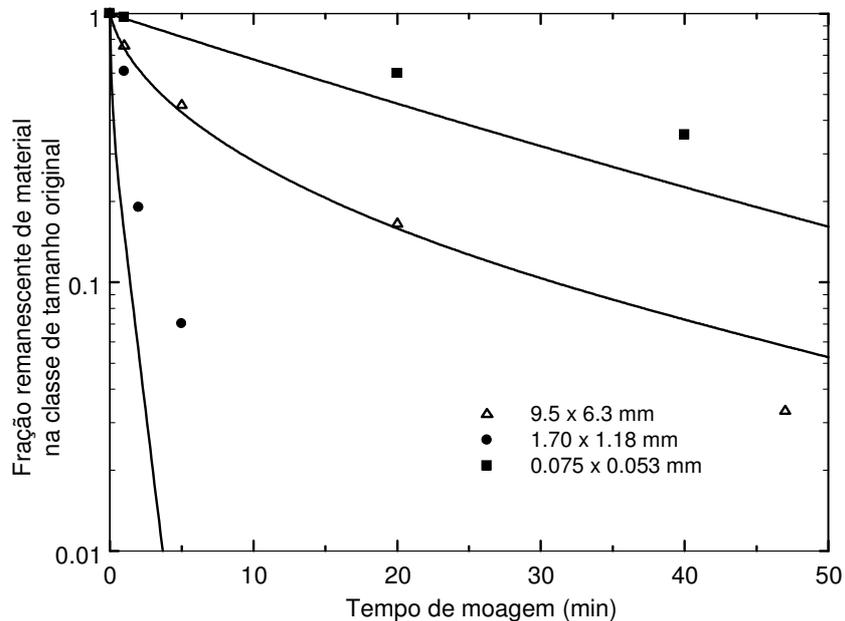


Figura IV.8 -Proporção remanescente na classe original de tamanho em função do tempo na moagem descontínua de granulito. Os pontos são os dados experimentais e as linhas são os dados simulados utilizando o modelo generalizado.

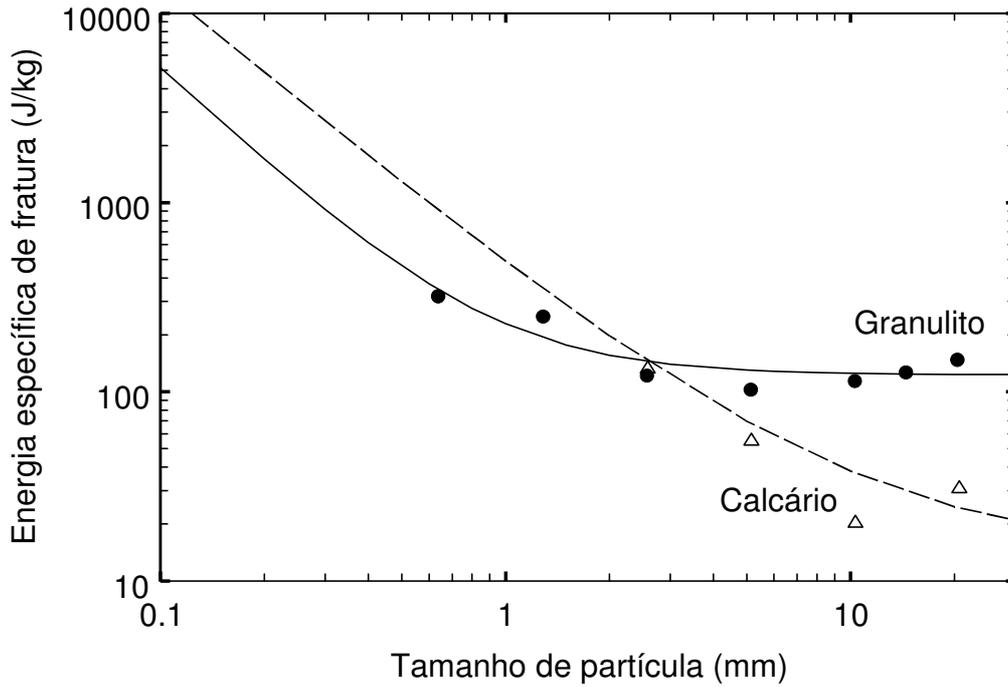


Figura IV.9 - Variação da mediana da energia específica de fratura com o tamanho de partícula.

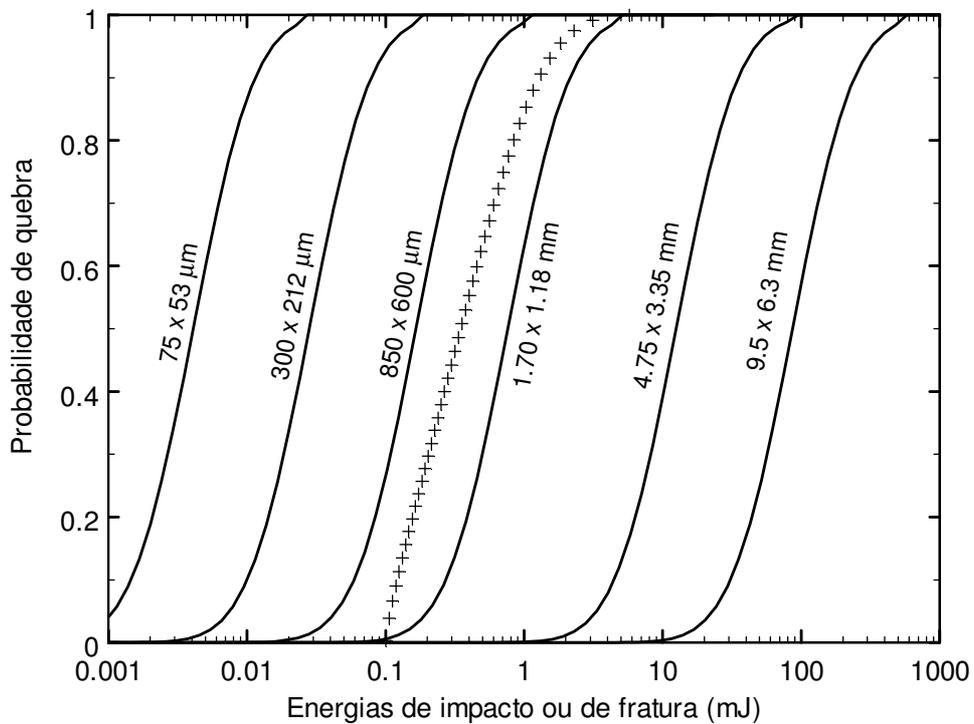


Figura IV.10 - Espectro de energias de impacto truncado em 10^{-4} J para o moinho descontínuo (símbolos) e distribuição de energias de fratura de alguns monotamanhos de granulito (calculadas utilizando as Equações III.7 a III.9).

No caso das partículas maiores que 3,35 mm, uma pequena fração dos impactos possui energia suficiente para acarretar na quebra das partículas. Nestes casos não é esperado o comportamento cinético de primeira ordem. Isso se deve ao fato que as partículas de material são enfraquecidas à medida que recebem impactos repetidos, os quais fazem com que a distribuição de energias de fratura destas partículas seja gradativamente deslocada no sentido da geração de partículas com baixa resistência, que, por consequência, quebram quando submetidas aos impactos. Um exemplo da mudança na distribuição de energias de fratura calculada resolvendo as Equações III.6 e III.10 é mostrado na Figura IV.11.

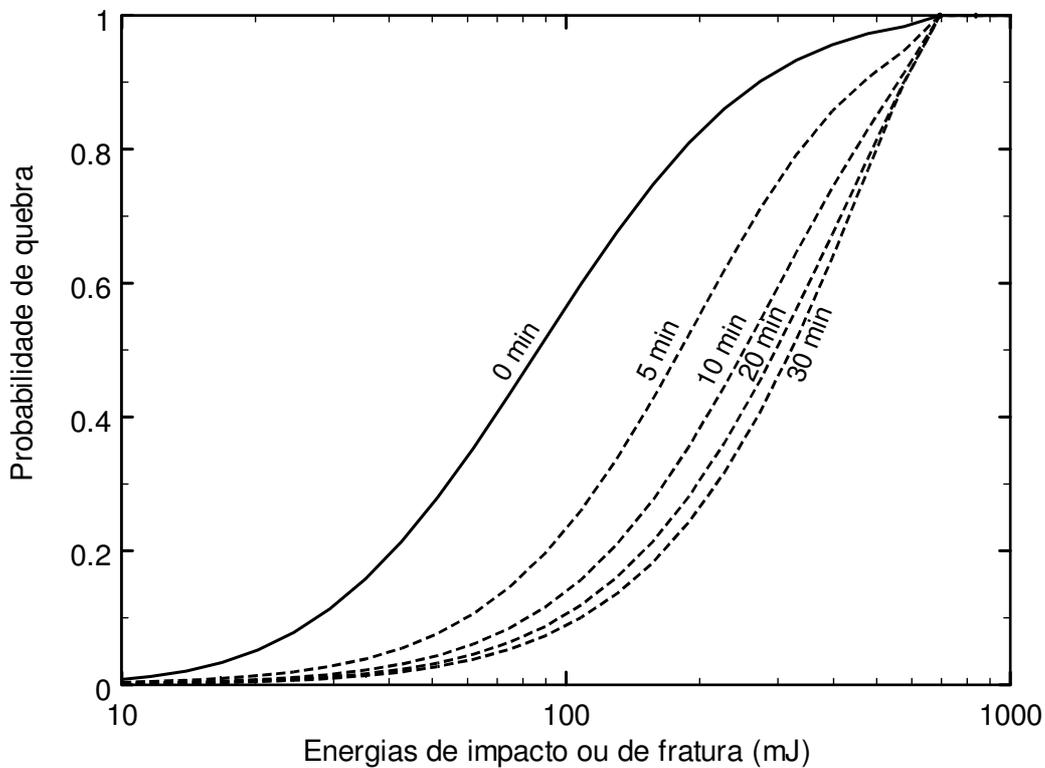


Figura IV.11 - Variação da distribuição de energias de fratura das partículas de granulito na faixa de tamanhos 9,5 x 6,3 mm ao longo do tempo de moagem.

Foram também realizados ensaios de moagem em batelada para dois materiais com características de quebra diferentes, um minério de cobre e o granulito das simulações anteriores, de modo que se obtivesse a análise granulométrica do material no interior do moinho em tempos selecionados. São comparados os resultados do ensaio de moagem

em batelada com aqueles obtidos pela simulação utilizando o MGC (Figura IV.12 e Figura IV.13).

Os parâmetros dos três materiais que foram utilizados nestas simulações são apresentados na Tabela IV.9. Para o minério de cobre nota-se que o modelo não correspondeu bem quando comparado o resultado do primeiro minuto de moagem, enquanto para tempos mais longos houve uma boa correspondência entre os dados experimentais e aqueles simulados. Isto pode ser explicado em parte pelo modelo de captura de partículas, que, para um corpo moedor de 25 mm, prevê a quebra de aproximadamente uma única partícula e por conseqüência, não há repartição de energia, provocando uma quebra intensificada. Isso está de acordo com o dado simulado que previu uma moagem mais acentuada que o dado real.

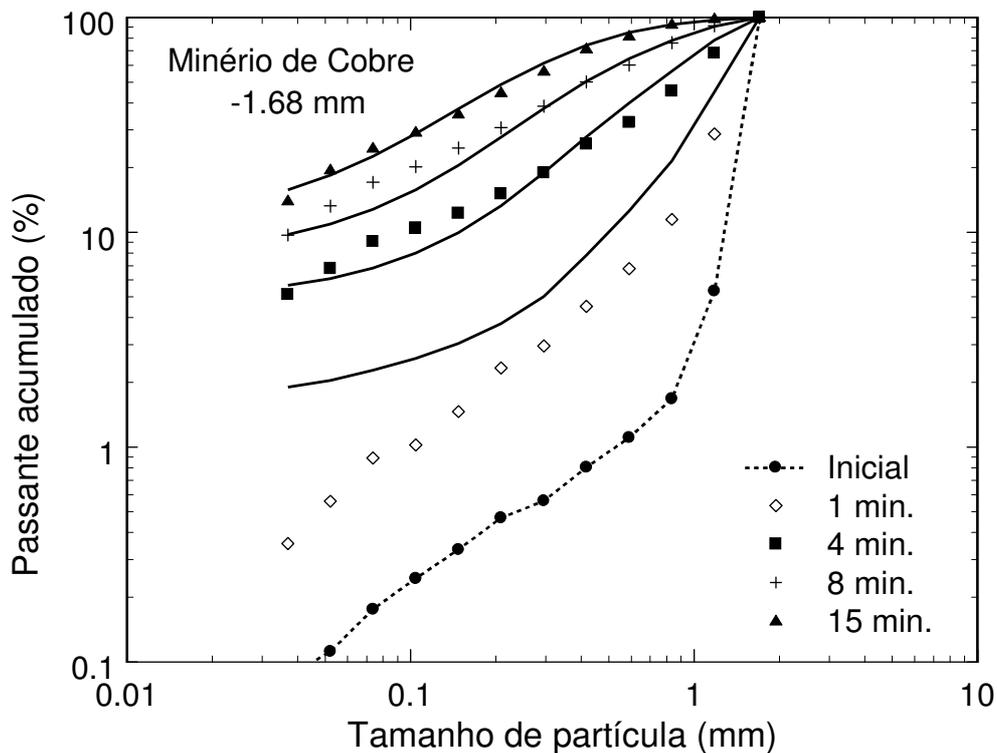


Figura IV.12 - Resultados da moagem descontínua para um minério de cobre com tamanho inicial menor que 1,68 mm. Os pontos representam os dados experimentais enquanto que as linhas contínuas são os dados simulados utilizando o MGC.

Tabela IV.9 - Parâmetros MGC utilizados nas simulações de moagem descontínua dos três materiais

Parâmetros	Granulito	Calcário	Minério de Cobre
Energia de fratura			
σ (-)	0,89	0,76	0,80
E_{∞} (J/kg)	123,0	13,4	242,9
d_o (mm)	0,91	10,00	2,73
ϕ (-)	1,68	1,50	1,14
Massa específica			
ρ (kg/m ³)	2800	2730	2930
Parâmetros da função quebra			
A (%)	47,5	56,0	51,5
b' (-)	0,027	0,023	0,028
Coeficiente de acúmulo de dano			
γ (-)	5,0	5,4	4,5
Parâmetros da abrasão			
P_a (%)	2,6	22,0	6,7
D_a (mm)	0,25	-	0,25
λ_a (-)	0,31	-	0,31
Dados da função beta incompleta unificada (para os três materiais)			
n	α_n	β_n	
1,2	0,39	7,13	
1,5	1,20	10,61	
2	1,51	5,93	
4	1,20	2,85	
25	0,86	0,44	
50	0,73	0,23	
75	0,68	0,14	

A diferença entre os valores simulados e experimentais de valores para tamanhos menores que 0,2 mm na Figura IV.12 é explicada pelo comportamento da função quebra. Isto foi ocasionado pela utilização de resultados ruins obtidos no

ensaio de queda de peso (DWT) para determinação da função quebra desse minério de cobre.

Para o granulito, a previsão do resultado do primeiro minuto da moagem foi razoavelmente boa. Pelo fato do tamanho das partículas contidas inicialmente no moinho serem mais grossas, o modelo de captura considerado pelo MGC foi mais adequado para descrever este caso. Isso mostra que, mesmo as funções simples e de caráter preliminar propostas para a função de repartição de energia quanto aquela usada no calcula da massa capturada fornecem, dentre as suas limitações uma boa previsibilidade de resultados no MGC.

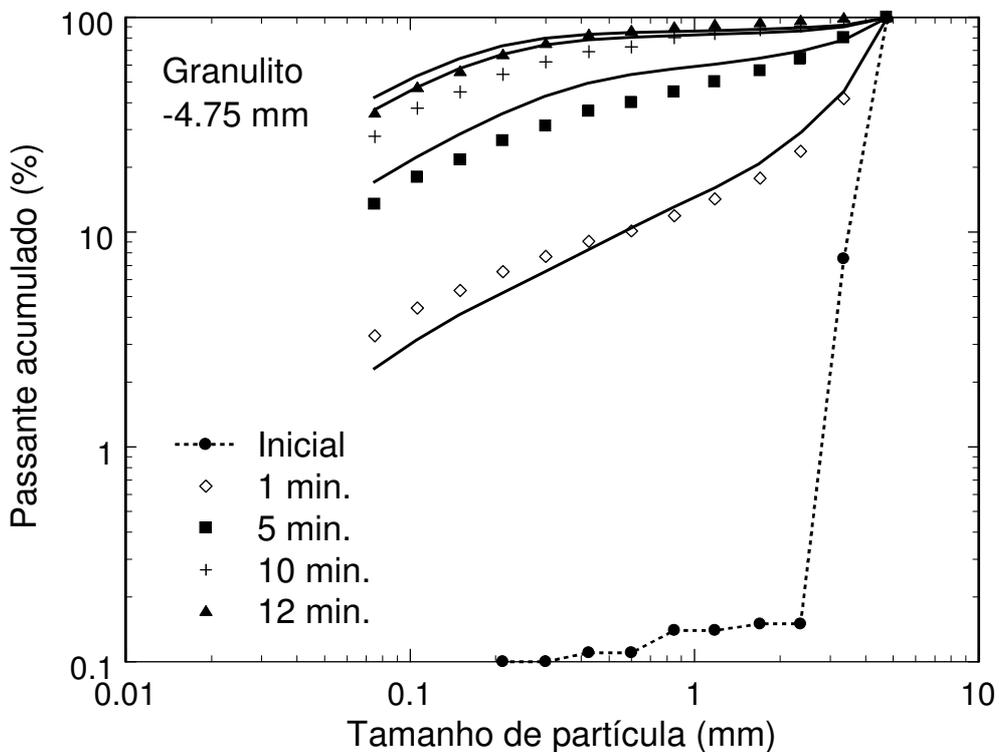


Figura IV.13 - Resultados da moagem descontínua para um granulito com tamanho inicial menor que 4,75 mm. Os pontos representam os dados experimentais enquanto que as linhas contínuas são os dados simulados utilizando o MGC.

IV.4 - Modelagem da moagem contínua em moinho de bolas

A modelagem contínua e dinâmica dos moinhos sempre representou desafios aos pesquisadores. Da forma como foi formulado o modelo generalizado da cominuição permite considerar as mudanças nas propriedades das partículas ao longo do tempo, o que pode torná-lo capaz de simular, inclusive, o desempenho de sistemas de controle.

O modelo foi utilizado para simular a moagem contínua de um minério de cobre em moinho de bolas de laboratório sem efeitos de classificação interna. Neste caso o moinho foi modelado como sendo um reator de mistura perfeita e a relação entre o *hold-up* e taxa de descarga usada foi aquela determinada experimentalmente por Carvalho e Tavares (2006),

$$W^{out}(t) = 0,015 \left(\frac{M(t)}{M^*} \right)^{1,5} \quad (\text{Eq. IV.14})$$

sendo M^* uma massa de referência (1,0 kg) e W^{out} é dado em kg/min.

Nas simulações considerou-se o espectro de energias de impacto determinado pelos parâmetros listados na Tabela IV.8. Além disso, a fim de ilustrar a capacidade do modelo de lidar com múltiplos componentes, nas simulações se considera que a alimentação é composta por dois componentes, na qual o componente 2 possui energias de fratura equivalente à metade das energias de fratura do componente 1, ou seja,

$$E_{50,i2} = \frac{E_{50,i1}}{2} \quad (\text{Eq. IV.15})$$

isto significa que para uma dada energia de impacto, a probabilidade das partículas do componente 2 fraturarem é maior que aquelas do componente 1. As partículas alimentadas ao processo são contidas na faixa de tamanho de 1,68 x 1,18 mm. Inicialmente somente partículas do primeiro componente foram alimentadas. Após 5 minutos de simulação a alimentação foi alterada de forma que a proporção de cada componente na alimentação foi 50 %. Como esperado, com a adição de um material menos resistente ao moinho, a intensidade de quebra aumentou gradativamente de forma a gerar um produto de menor granulometria do que o gerado antes da adição do componente 2. Os parâmetros do minério de cobre são aqueles listados na Tabela IV.9.

A Figura IV.14 mostra os valores da mediana da energia específica de fratura da classe de tamanhos $i=3$ do componente 1 ($E_{50,3,1}$) em função do tempo, para o caso da mudança na composição da alimentação após 5 minutos de moagem. A variação da granulometria do produto, em função do parâmetro d_{80} é mostrada na Figura IV.15.

Os resultados mostram que o modelo foi sensível a uma mudança súbita na resistência do material alimentado, mostrando uma gradual mudança na resistência do material no interior do moinho, conforme esperado. Notou-se também a estabilidade do modelo que saiu de uma condição estacionária para outra, após o estabelecimento do equilíbrio da composição do *hold-up* do moinho.

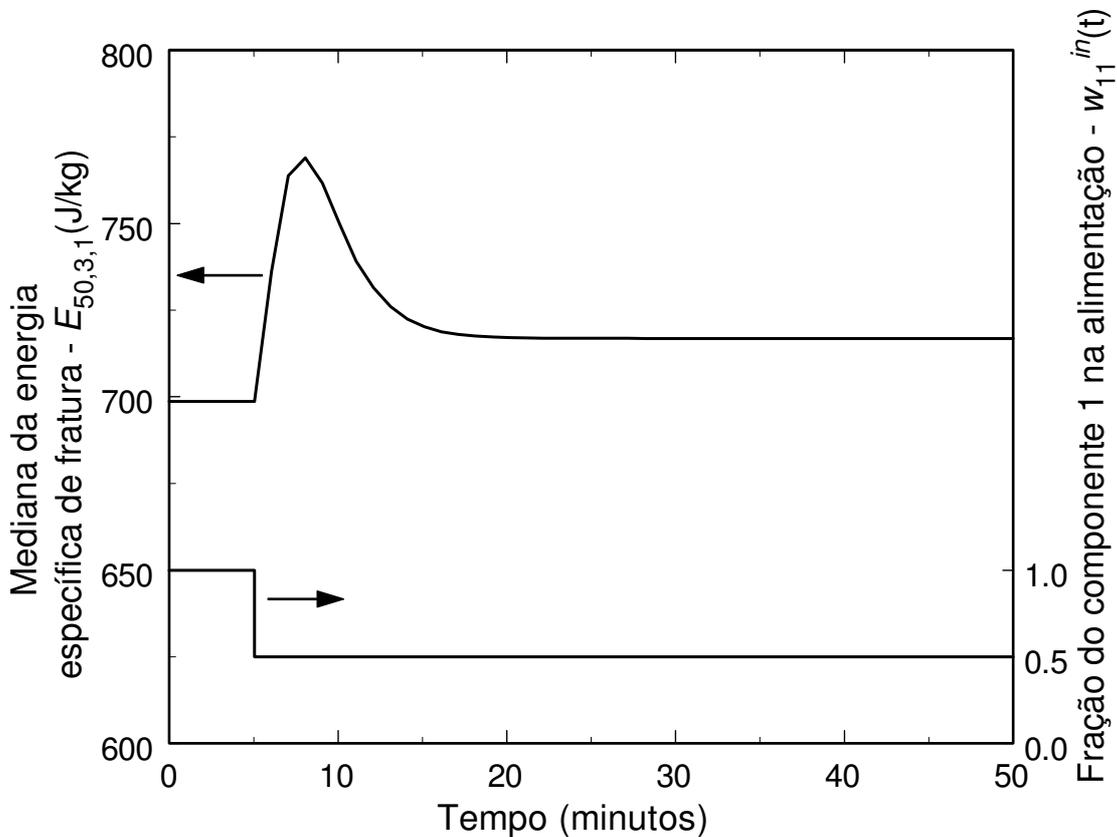


Figura IV.14 - Variação do d_{80} e da mediana da energia específica de fratura da classe $i=3$ do componente 1 ($E_{50,3,1}$) como função do tempo para a mudança na composição da alimentação após 5 minutos de moagem.

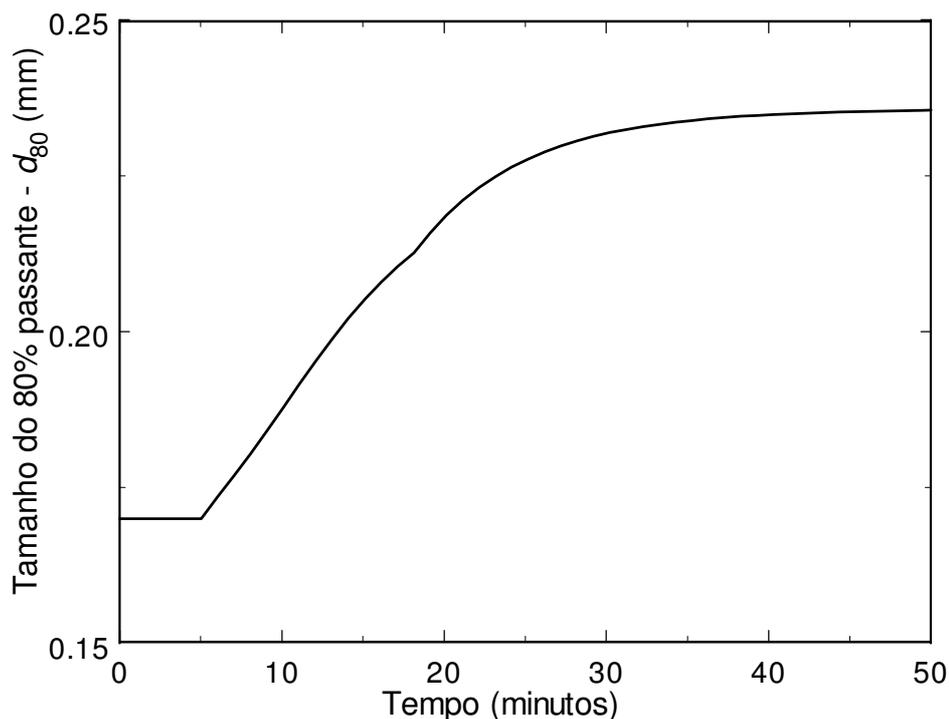


Figura IV.15 - Variação do d_{80} na simulação da moagem contínua após a mudança na composição da alimentação no tempo de 5 minutos.

IV.5 - O MGC na descrição da moagem semi-autógena

A simulação da moagem dinâmica representa um grande passo na aplicação do MGC à modelagem de moinhos autógenos e semi-autógenos, pois nestes casos a distribuição granulométrica das partículas grossas, as quais agem como corpos moedores autógenos, muda, demandando que o espectro de energias de impacto seja recalculado quase que continuamente. Atualmente a simulação do movimento dos corpos moedores por DEM que resulta no espectro de energias de impacto, não pode ser realizada em tempo real, pois demanda um grande esforço computacional.

Diante deste cenário, é possível imaginar que a modelagem dos moinhos autógenos e semi-autógenos utilizando o MGC demandaria que fosse estabelecido um banco de dados com os espectros de energias de impacto já determinados para uma grande variedade de condições operacionais para um determinado moinho. Desta forma na solução do equacionamento do MGC, a cada iteração no tempo, o modelo consultaria o banco de dados e atualizaria o espectro de energias em função das condições operacionais do instante de tempo anterior. Isso poderia ser facilitado se, por exemplo,

todos estes espectros simulados fossem modelados utilizando uma função de distribuição simples, como a equação de Rosin-Rammler truncada, conforme proposto na Equação IV.13, associando os seus parâmetros de ajuste (E_{min} , E_P , η) à variáveis operacionais como o grau de enchimento, distribuição de tamanhos de bolas, distribuição de tamanhos das partículas que atuam como corpos moedores autógenos, velocidade de rotação do moinho, entre outras.

O caso da moagem semi-autógena evidencia a importância da identificação dos tipos de contatos que podem ocorrer no interior do moinho. Neste caso a utilização da Matriz de Colisões, como aquela apresentada na Tabela III.2, considerando as interações partícula-partícula e partícula-corpo moedor.

IV.6 - Aplicação do MGC a um tipo de britador

Embora a modelagem matemática de britadores seja mais complexa, pois devem ser consideradas as particularidades de cada tipo de equipamento, um modelo conceitual foi desenvolvido com o objetivo de mostrar uma aplicação do MGC em britadores.

O britador escolhido foi o britador de impacto, que pode ser do tipo ilustrado na Figura IV.16. Este britador é também chamado britador horizontal de martelos, pois possui uma câmara com um eixo horizontal no qual são acoplados três ou mais hastes dotadas de um martelo na suas extremidades. O material é alimentado superiormente e ao entrar na câmara de britagem, sofre impacto dos martelos que giram no sentido anti-horário (Wills, 1997). Em seguida, o material é transportado sobre uma grelha, sofrendo um processo de classificação no qual as partículas finas deixam o equipamento e as grossas continuam na câmara de britagem sofrendo repetidos impactos até que se tornarem finas o suficiente para deixar o processo.

A seqüência de eventos neste equipamento pode ser resumida em: impacto, quebra e classificação. Em um intervalo de tempo uma dada quantidade de material é alimentada, enquanto todo material que chega à câmara de britagem é impactado por um dos martelos. Dependendo da frequência de rotação do eixo é possível estimar quantos impactos que a população de partículas recebe até que alcance a grelha de descarga. A Figura IV.17 ilustra as etapas do processo que é semelhante àquele descrito por Whiten (1972).

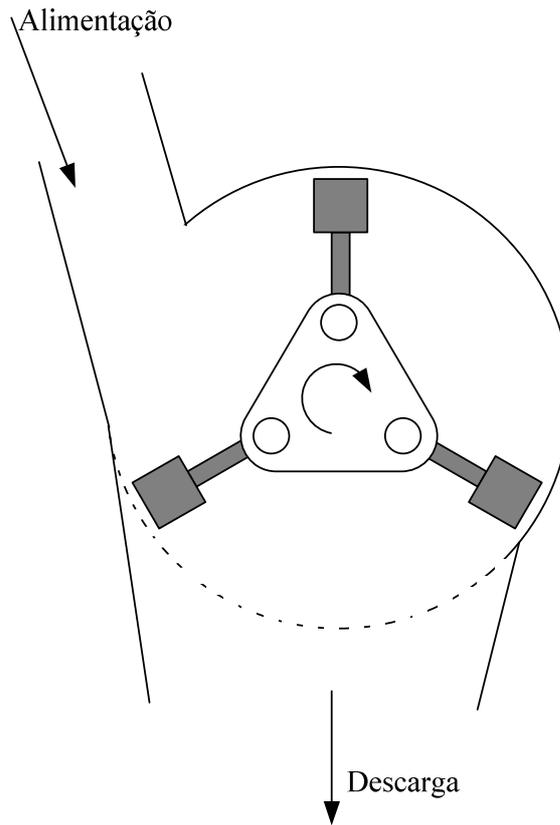


Figura IV.16 - Diagrama esquemático do britador horizontal de martelos.

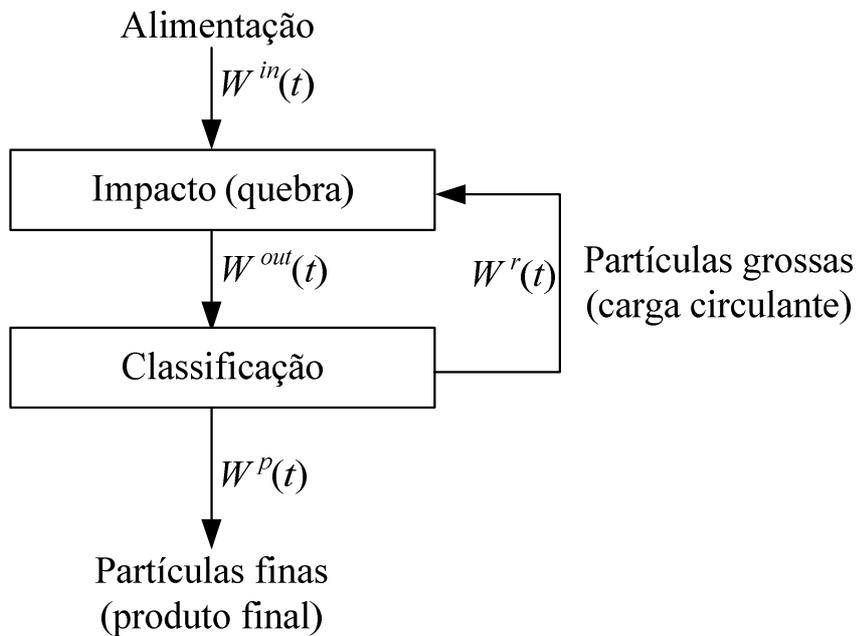


Figura IV.17 - Ilustração do processo de quebra no britador horizontal de impactos.

O equacionamento do modelo é derivado da Equação III.1 no qual o interior do britador (ambiente de quebra) é considerado como um misturador perfeito e cuja descarga do misturador $W^{out}(t)$ é posteriormente classificada, originando o produto ($W^p(t)$) e a carga circulante ($W^r(t)$),

$$\frac{d[w_{il}(t)M(t)]}{dt} = w_{il}^{in}(t)W^{in}(t) + w_{il}^r(t)W^r(t) + \omega_k \sum_k [-D_{ilk}^b(t) - D_{ilk}^s(t) + A_{ilk}^b(t) + A_{ilk}^s(t)] - w_{il}^{out}(t)W^{out}(t) \quad (\text{Eq. IV.16})$$

As frações mássicas do material que retorna ao ambiente de quebra $w_{il}^r(t)$ podem ser calculadas da curva de partição equivalente a classificação pela grelha,

$$w_{il}^r(t) = c_i w_{il}^{out}(t) \quad (\text{Eq. IV.17})$$

e,

$$W^r(t) = W^{out}(t) \sum_i \sum_l c_i w_{il}^{out}(t) \quad (\text{Eq. IV.18})$$

na qual a curva de partição c_i , pode ser considerada equivalente aquelas empregadas na modelagem matemática de peneiras.

Os termos de aparecimento e desaparecimento de material nas classes il podem ser re-escritos baseados na hipótese de que as partículas quebram por dois tipos de mecanismos, pelo impacto dos martelos e pela colisão das partículas contra o revestimento. Para simplificar a modelagem, são considerados na quebra apenas os impactos ocasionados pelo choque dos martelos com as partículas, pois desta forma a energia aplicada é constante de uma única magnitude. Esta simplificação reflete no equacionamento do processo, pois a integral sobre o espectro de energias de impacto se torna desnecessária, bem como o somatório sobre os tipos de colisão k . Para os termos relativos à quebra por impacto,

$$D_{il}^b(t) = w_{il}(t) m_i(E) \int_0^1 [1 - b_{il}(eE, t)] F_{il}(eE, t) p(e) de \quad (\text{Eq. IV.19})$$

$$A_{il}^b(t) = \sum_{j=1}^{i-1} w_{jl}(t) m_j(E) \int_0^1 b_{ijl}(eE, t) F_{jl}(eE, t) p(e) de \quad (\text{Eq. IV.20})$$

O balanço das energias de fratura, por sua vez, é re-escrito de forma a contemplar o efeito da entrada de material da carga circulante. Esse material possui uma distribuição de energias de fratura idêntica àquela do material contido no interior do britador ($F_{il}(E, t)$). Isto é possível, pois, considera-se que a ação de classificação realizada pela grelha de descarga do equipamento não é seletiva no que diz respeito às energias de fratura do material.

$$F_{il}^{in}(E, t) = \frac{Q_{il}F(E, t=0) + S_{il}F(E, t)}{Q_{il}(t) + S_{il}(t)} \quad (\text{Eq. IV.21})$$

para,

$$S_{il}(t) = \frac{w_{il}^r(t) W^r(t) dt}{M(t)} \quad (\text{Eq. IV.22})$$

que significa a fração de material descarregado do ambiente de moagem e que foi posteriormente classificado.

Substituindo os termos de entrada de material na Equação III.6 o balanço de distribuição de energia se torna,

$$F_{il}(E, t + dt) = \frac{G_{il}F_{il}^*(E, t + dt) + H_{il}F(E, t=0) + (S_{il} + Q_{il})F_{il}^{in}(E, t)}{G_{il} + H_{il} + Q_{il} + S_{il}} \quad (\text{Eq. IV.23})$$

A energia de impacto pode ser calculada pelo método dos elementos discretos ou, adicionalmente, pelo cálculo direto assumindo-se que os impactos que podem ocasionar a quebra das partículas ocorrem na extremidade dos martelos. Considera-se que a energia específica de impacto aplicada sobre as partículas pode ser calculada por,

$$E = \frac{\omega^2 r^2}{2} \quad (\text{Eq. IV.24})$$

na qual, ω é a frequência de rotações do braço do martelo e r é o raio do centro à ponta do martelo.

V - CONCLUSÕES

Um modelo matemático mecanístico e generalizado foi desenvolvido, baseado nos conceitos da modelagem em micro-escala. O modelo generalizado da cominuição (MGC) descreve o processo de quebra que ocorre em equipamentos de cominuição de forma a desacoplar os efeitos do material e do equipamento. Desta forma, ele permite desenvolver formulações do modelo a aplicações selecionadas, como a quebra de partículas individuais, em leitos, degradação por manuseio, moagem em moinhos de bolas, autógenos e semi-autógenos e em britadores como o britador de martelos.

O modelo aplicado à moagem em batelada descreveu razoavelmente bem os produtos de quebra ao longo do tempo, quando comparado aos dados experimentais. Um aprimoramento do modelo pode ser obtido pelo desenvolvimento de modelos para a captura de partículas e a repartição da energia de impactos em leitos.

A modelagem da moagem contínua em moinhos de bolas para um material multicomponente indicou a mudança na granulometria do produto do moinho quando este foi alimentado com uma maior proporção de um componente menos resistente. Esta aplicação da modelagem se mostrou bastante promissora, abrindo caminho para sua aplicação em processos de maior complexidade como aqueles ocorridos nos moinhos autógenos e semi-autógenos.

A utilização do método dos elementos discretos no modelo generalizado permite descrever adequadamente efeitos relativos à construção física e princípio de funcionamento dos equipamentos de cominuição. Um exemplo disto é a previsão da moagem para diferentes tipos de revestimentos de moinhos de bolas. Outros efeitos podem ser citados como, o grau de enchimento dos moinhos, distribuição de tamanhos dos corpos moedores, efeito da abertura dos britadores, dentre outros.

Um desafio identificado na aplicação do modelo generalizado é a grande quantidade de ensaios demandados na determinação das propriedades do material processado. Exemplos disso são os ensaios de determinação da distribuição de energias de fratura e do parâmetro que caracteriza a resposta do material aos impactos repetidos de baixa magnitude. Estudos visando substituir estes ensaios estão em andamento e cujo objetivo final é transformar os ensaios de caracterização dos materiais em rotina industrial, de

maneira que os ensaios possam ser prontamente realizados determinando as propriedades com uma frequência quase contínua gerando informações que possam ser alimentadas, por exemplo, a um sistema de controle de processo baseado no MGC.

VI - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSEN, J., NAPIER-MUNN, T.J., 1990, “The influence of liner condition on cone crusher performance”, *Minerals Engineering*, v. 3, n. 1-2, pp. 105-116.
- ANDERSEN, J.S., 1988, *Development of a cone crusher model*. M. Eng. Sc. thesis, University of Queensland (JKMRC), Queensland, Australia
- ARIS, R., 1993, “Ends and Beginnings in the Mathematical Modelling of Chemical Engineering Systems”, *Chemical Engineering Science*, v. 48. n. 14, pp. 2507-2517.
- AUSTIN L.G., KLIMPEL R. and LUCKIE, P.T., 1984, “Process Engineering of Size Reduction: Ball Milling”, **AIME, SME**, New York, USA (1984).
- AUSTIN, L. G., 1990, “A mill power equation for SAG mills”, *Minerals and Metallurgical Processing*, pp. 57-62
- AUSTIN, L. G., 2004b, “A preliminary simulation model for fine grinding in high speed hammer mills”, *Powder Technology*, v. 143-144, p. 240-252.
- AUSTIN, L.G., 2004a, “The effect of damage on breakage kinetics”, *Powder Technology*, v. 143-144, pp.151-159.
- BARRIOS, G. P., 2009, comunicação pessoal.
- BARRIOS, G. P., TAVARES, L. M., 2009, “Fratura de partículas em leitos como base para a modelagem de processos de cominuição”, *XXIII Encontro Nacional de Tratamento de Minérios e Metalurgia Extrativa*, Gramado-RS (aceito para publicação)
- BILGILI, E., SCARLETT, B., 2005, “Population Balance Modeling of Non-Linear Effects In Milling Processes”, *Powder Technology*, v. 153, n. 1, pp. 59-71.
- BOND, F. C., 1952, “The third theory of comminution”, *Transactions of AIME Mining Engineering*, 193, pp. 484–494.

- BOURGEOIS, F.S., 1993, *Single particle fracture as a basis for microscale modeling of comminution processes*, Ph.D. thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- CARVALHO, R. M. ; TAVARES, L. M., 2006, “Simulação dinâmica da moagem a seco em moinho de bolas”. In: *Anais do IX Encontro de Modelagem Computacional*, 2006, Belo Horizonte/MG.
- CARVALHO, R. M., 2007, *Modelagem, Simulação e Controle da Moagem a Seco em Moinho de Bolas*. Projeto Final de Curso, Escola de Química/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- CARVALHO, R. M., TAVARES, L. M., 2009a, “Dynamic modeling of comminution using a general microscale breakage model”, *Computer-aided Chemical Engineering* (aceito para publicação)
- CHO, K., 1987, *Breakage Mechanisms in Size Reduction*, PhD thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- DATTA, A., 1999, *A Model of Batch Grinding with Impact Energy Data*. PhD thesis, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- EVERTSSON, CM., BEARMAN, R.A., 1997, "Investigation of interparticle breakage as applied to cone crushing", *Minerals Engineering*, v. 10, n. 2, pp. 199-214.
- FUERSTENAU, D. W., ABOUZEID, Z. M., 2002, “The energy efficiency of ball milling in comminution”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 67, Issues 1-4, November 2002, Pages 161-185
- FUERSTENAU, D.W., KAPUR, P.C., 2004, “Linear and Nonlinear Particle Breakage Processes in Comminution Systems”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 74, s.1, pp. S317-S327.
- HERBST, J.A. FUERSTENAU, D.W., 1980, “Scale-up procedure for continuous grinding mill design using population balance models”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 7, n. 1 p. 1-31.

- HERBST, J.A., 2004, “A microscale look at tumbling mill scale-up using high fidelity simulation”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 74, s. 1, pp. S299-S306.
- HERBST, J.A., FUERSTENAU, D.W., 1973, “Mathematical Simulation of Dry Ball Milling Using Specific Power Information”, *AIME Transactions*, 254-348, 3173.
- HERBST, J.A., RAJAMANI, K., 1982, “The Application of Modern Control Theory to Mineral-Processing Operations”, In: *Proceedings of the 12th CMMI Congress*, South African Inst. Min. Metall., Johannesburg, South Africa.
- HÖFLER, A. HERBST, J.A., 1990, “Ball mill modeling through micro-scale fragmentation studies: fully monitored particle bed comminution versus particle impact tests”. In: *Proceedings of the 7th European Symposium. on Comminution*, pp. 1–17, Ljubljana, Slovenia.
- KING, R. P., BOURGEOIS, F., 1993, “Measurement of fracture energy during single-particle fracture”, *Minerals Engineering*, v. 6, p. 353-367.
- KING, R.P. BOURGEOIS, F.S., 1993, “Measurement of fracture energy during single-particle fracture”, *Minerals Engineering 4*, v. 6, n. 4, pp. 353–367.
- KING, R.P., 2001, *Modeling and simulation of mineral processing systems*. Boston, Butterworth-Heinemann.
- LICHTER, J., LIM, K., POTAPOV, A., KAJA, D., 2009, “New developments in cone crusher performance optimization”, *Minerals Engineering*, v. 22, pp. 613-617.
- MILIN, L., 1994, Modeling the $t_{10} \times t_n$ relationship by the incomplete beta function. University of Utah.
- MINDLIN, R. D., 1949, “Compliance of elastic bodies in contact”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 71, 259-268.
- MISHRA, B. K, RAJAMANI, R. K., 1992. “The discrete element method for the simulation of ball mills”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 16, p. 598-604.

- MISHRA, B. K., MURTY, C. V. R., 2001, “On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of ball mills”, *Powder Technology*, v.115, p.290-297.
- MISHRA, B.K., 1991. *Study of media mechanics in tumbling mills by the discrete element method*. Ph.D. thesis, Department of Metallurgical Engineering, University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA.
- MISHRA, B.K., RAJAMANI, R.K., 1992. “The discrete element method for the simulation of ball mill”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 16, n.11, pp. 598-604.
- MORRELL, S., 1996, “Power draw of wet tumbling mills and its relationship to charge dynamics – Part 1: a continuum approach to mathematical modeling of mill power draw”, *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy*, 105, C43-C53, Jan-Abril
- MORRISON, R. D., CLEARY, P. W., 2004, “Using DEM to model ore breakage within a pilot scale SAG mill”, *Minerals Engineering*, v. 17, p. 1117-1124.
- NAPIER-MUNN, T.J., MORRELL, S., MORRISON, R.D., KOJOVIC, T., 1996, “Mineral comminution circuits: Their operation and optimization”, *JKMRC Monograph Series*, pp. 413, University of Queensland, Brisbane, Australia
- NARAYANAN, S. S., WHITEN, W. J., 1988, “Determination of comminution characteristics from single particle breakage tests and its application to ball mill scale-up”, *Transactions of the Institute of Mining and Metallurgy*, 97, C115-124
- POTAPOV, A.V. CAMPBELL, C.S., 2000, “The breakage induced by a single grinding ball dropped onto a randomly packed particle bed”, *Powder Technology*, v. 107, n. 1-2, pp. 108–117
- POTAPOV, A.V., CAMPBELL, C.S. HOPKINS, M.A., 1995, “A two-dimensional dynamic simulation of solid fracture: Part II. Examples”, *International Journal of Modern Physics C* **6**, v.6, n.3, pp. 399–425.

- POWELL, M. S., GOVENDER, I., McBRIDE, A. T., 2008, “Applying DEM outputs to the unified comminution model”, *Minerals Engineering*, v. 21, n. 11, p.744-750.
- POWELL, M.S., MORRISON, M.D., 2007. “The future of comminution modeling”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 84, n. 1-4, pp. 228-239.
- RAJAMANI, R.K., MISHRA, B.K., VENUGOPAL, R., DATTA, A., 2000, “Discrete element analysis of tumbling mills”, *Powder Technology*, v. 109, n. 1–3, pp. 105–112
- RAMKRISHNA, D., BORWANKER, J.D., 1973, “A Puristic Analysis of Population Balance”, *Chemical Engineering Science*, v. 28, pp. 1423-1435.
- ROWLAND, C. A., KJOS, D. M., 1978, *Rod and ball mills, Mineral Processing Plant Design*, (Mular e Bapphu, Eds.), AIME, New York.
- SCHÖNERT, K. 1986. *Advances in the Physical Fundamentals of Comminution. Em Advances in Mineral Processing*. Editado por P. Somasundaran. Littleton, Colo.: SME
- SCHÜBERT, W., JESCHKE, H., TOMAS, J., POPPY, W., 2006, “3D-DEM-Simulation of Crushing Events in the Chamber of an Impact Crusher”, In: *Proceedings of the 11th European Symposium on Comminution*, Budapest, Hungary.
- SHI, F., KOJOVIC, T., 2007, “Validation of a model for impact breakage incorporating particle size effect”, *International Journal of Mineral Processing*, v. 82, pp. 156-163.
- TAVARES, L. M., 1997, *Microscale Investigation of Particle Breakage Applied to the Study of Thermal and Mechanical Predamage*, Ph. D. Thesis, University of Utah.
- TAVARES, L. M., 2007, “Breakage of particles: Quasi-Static”. In: SALMAN, A.D., GHADIRI, M. and HOUNSLOW, M.J. (eds.), *Handbook of Powder Technology: Particle Breakage*. 1 ed. Amsterdam: Elsevier B.V., v. 12, pp. 3-68.

- TAVARES, L. M., 2009, "Analysis of particle fracture by repeated stressing as damage accumulation", *Powder Technology*, v. 190, p. 327-339
- TAVARES, L. M., ALVES, V. K., CARVALHO, R. M., 2009, "Comparação de metodologias de escalonamento de moinhos de bolas", 10º Simpósio Brasileiro de Minério de Ferro, Ouro Preto - MG
- TAVARES, L. M., CARVALHO, R. M., 2008, "Modeling iron ore degradation during handling, Em: 2nd International Symposium on Iron Ore", 2008, São Luís. In: *Anais do 2nd International Symposium on Iron Ore*. São Paulo: ABM, 2008. v.1 p. 69-80.
- TAVARES, L. M., CARVALHO, R. M., 2009a, "Modeling breakage rates of coarse particles in particles in ball mills", *Minerals Engineering*, v. 22, p. 650-659.
- TAVARES, L. M., CARVALHO, R. M., 2009c, "Modeling ore degradation during handling using continuum damage mechanics", In: *European Symposium on Comminution and Classification*, Finland (aceito)
- TAVARES, L.M. CARVALHO, R.M., 2007, "Impact work index prediction from continuum damage model of particle fracture", *Minerals Engineering*, v. 20, n. 15, pp. 1368-1375.
- TAVARES, L.M., 2005, "Operações Unitárias em Processamento Mineral", Apostila do curso de Processamento de Recursos Minerais I do Programa de Engenharia Metalúrgica e de Materiais da Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- TAVARES, L.M., CARVALHO, R.M., 2009b, "Investigation of attrition breakage using a standard abrasion test", *Minerals Engineering* (submitted for publication).
- TAVARES, L.M., KING, R.P., 1998, "Single-particle fracture under impact loading", *International Journal of Mineral Processing*, v. 54, n. 1, pp. 1-28.
- TAVARES, L.M., KING, R.P., 2002, "Modeling particle breakage by repeated impacts using continuum damage mechanics", *Powder Technology*, v.123, n. 2-3, pp. 138-146.

- VERVOORN, P.M.M., AUSTIN, L.G., 1990, “The analysis of repeated breakage events as an equivalent rate process”, *Powder Technology*, v. 63, pp. 141–147.
- WALSTRA, C., CURRY, D., RULE, C., 2008, “What if we already know? Energy efficient concentrator design”, Em: COMMINUTION '08, Fallmouth, 2008.
- WEICHERT, R. HERBST, J.A., 1986, “An ultra fast load cell for measuring particle breakage”, In: *Proceedings of World Congress Particle Technology: Part II. Comminution*, pp. 3–15.
- WHITEN, W.J., 1972, “A model for simulating crushing plants”, *Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, v. 72, n. 10, pp. 257–264.
- WHITEN, W.J., 1984, Models and control techniques for crushing plants. Control '84, Ed. Herbst, Society of Minerals Engineering, 217-224
- WILLS, 1997, *Mineral Processing Technology*, 6^a edição, Butterworth Heinemann
- ZHOU, Y. D., WRIGHT, B. D., YANG, R. Y., XU, B. H., YU, A. B., 1999, “Rolling friction in the dynamic simulation of sandpile formation”, *Physica*, 269, 536-553.

APÊNDICE A - Algoritmo de solução do MGC

Este apêndice tem como objetivo apresentar o algoritmo de solução do MGC para o caso geral apresentado no Capítulo III. Devido à complexidade do modelo, deve se obedecer a uma seqüência de cálculos em diversos loops aninhados. Um algoritmo simplificado é apresentado na Figura A.1.

- Inicializar parâmetros do modelo
- Inicializar classes de tamanho de partícula
- Inicializar coordenadas de energia de impacto/fratura
- Calcular $F_i(E,0)$
- Calcular $p(E,0)$
- Especificar Δt

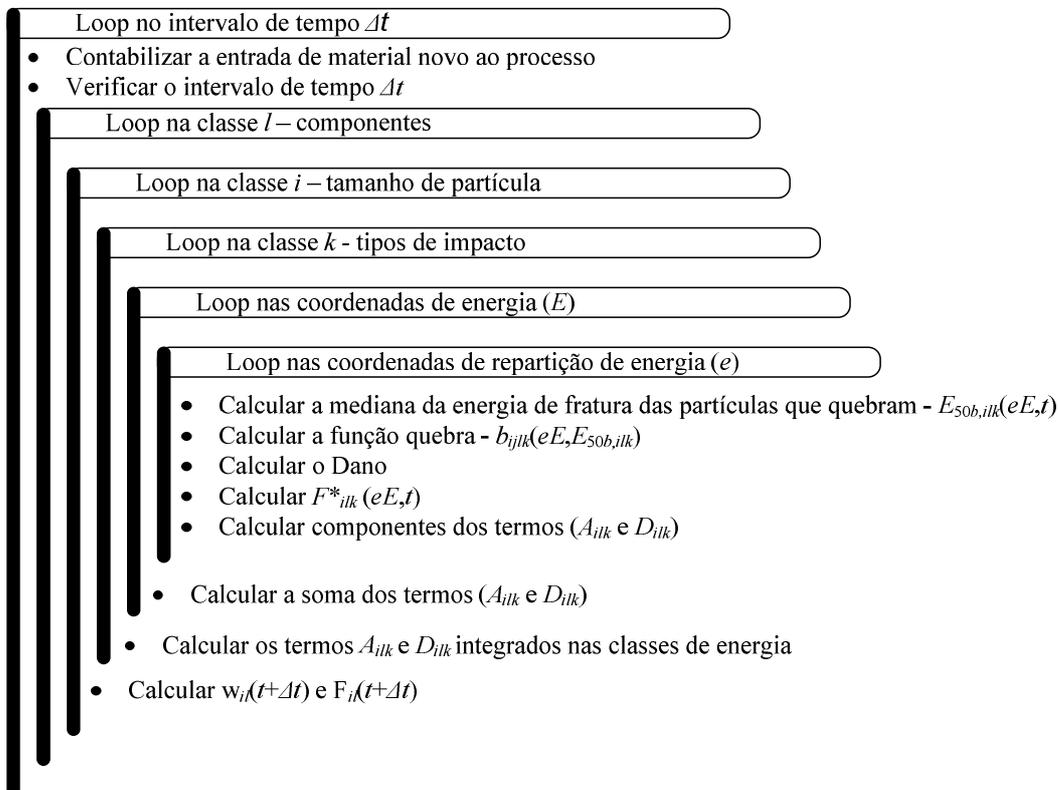


Figura A.1– Algoritmo de cálculo do MGC.

APÊNDICE B - LISTA DE PUBLICAÇÕES

- Tavares, L. M., Carvalho, R. M. de, 2007, “Impact work index prediction from continuum damage model of particle fracture”, *Minerals Engineering*, v. 20, p. 1368-1375.
- Tavares, L. M., Carvalho, R. M. de, 2008, “Modeling iron ore degradation during handling”, In: *Proceedings of the 2nd International Symposium on Iron Ore*, São Paulo: ABM, v.1, p. 69-80.
- Tavares, L. M., Carvalho, R. M. de, “Modeling breakage rates of coarse particles in ball mills”, *Minerals Engineering*, v. 22, p. 650-659, 2009
- Carvalho, R. M. de, Tavares, L. M., 2009, “Dynamic modeling of comminution using a general microscale breakage model”, *Computer-aided Chemical Engineering* (aceito para publicação)
- Tavares, L. M., Carvalho, R. M. de, 2009, “Modeling ore degradation during handling using continuum damage mechanics”, *European Symposium on Comminution and Classification*, Finland (aceito)
- Carvalho, R. M. de, Tavares, L. M., 2009, “Desenvolvimento de modelo generalizado para processos de cominuição”, *XXIII Encontro Nacional de Tratamento de Minérios*, Gramado/RS (aceito)

APÊNDICE C - LISTA DE ABREVIATURAS

CCI	Célula de Carga de Impacto
CFD	Computational Fluid-dynamics (Fluidodinâmica Computacional)
DEM	Discrete Element Method (Método dos Elementos Discretos)
DGB	Discrete Grain Breakage (Quebra Discreta dos Grãos)
HFS	High Fidelity Simulation (Simulação de Alta Fidelidade)
JKMRC	Julius Kruttschinit Mineral Research Centre
MBP	Modelo do Balanço Populacional
MGC	Modelo Generalizado da Cominuição